〈研究ノート〉

対角化不能な正方行列の斜交射影によるスペクトル射影の構成

中澤秀夫[1]

Construction of spectral projection by oblique projection for nondiagonalizable square matrices

Hideo NAKAZAWA

1.　1つの例

はじめに、次の問題[2]を考える。

例題

都内 J, K, N 各大学病院 (以下、J, K, N, と略記) の今月の診察者数は各々 2,600 人、3,400 人、4,000 人であり、毎月各大学病院間で、次の規則に従って診察先を変更する患者がいるという：

J における今月の診察者数の 2%ずつが翌月には K 及び N に、K における今月の診察者数の 1%ずつが翌月には J 及び N に、N における今月の診察者数の 1%が翌月には J に、また 2%が翌月には K に、其々変更する。

十分時間が経過した後に J, K, N, 各大学病院における毎月の診察者数は其々いくつになるか。但し、これら 3 病院を受診している患者数は常に 10,000 人で一定であるとし、月々によってこの総数の増減はないものとする。

[1]日本医科大学 医学部 基礎科学 数学教室 (Department of Mathmatics, Liberal Arts and Sciences, Faculty of Medicine, Nippon Medical School)

[2]マルコフ連鎖の典型題である。

(20)

$\boxed{\text{解説}}$ J, K, N, 各大学病院を診察している患者数を其々 x_0, y_0, z_0 とすると

$$x_0 = 2600, \qquad y_0 = 3400, \qquad z_0 = 4000$$

である。また $n = 1, 2, 3, \cdots$ として n ヶ月後の J, K, N, 各大学病院を診察している患者数を各々 x_n, y_n, z_n とすると、問題文の条件より

$$\begin{cases} x_n &= 0.96x_{n-1} + 0.01y_{n-1} + 0.01z_{n-1}, \\ y_n &= 0.02x_{n-1} + 0.98y_{n-1} + 0.02z_{n-1}, \\ z_n &= 0.02x_{n-1} + 0.01y_{n-1} + 0.97z_{n-1}, \end{cases}, \qquad \begin{cases} x_0 &= 2600, \\ y_0 &= 3400, \\ z_0 &= 4000 \end{cases}$$

が成り立つ。ここで、ベクトル $\overrightarrow{v_n}$ $(n = 0, 1, 2, 3, \cdots)$ と行列 M を

$$\overrightarrow{v_n} = \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{pmatrix}, \qquad M = \frac{1}{100}\begin{pmatrix} 96 & 1 & 1 \\ 2 & 98 & 2 \\ 2 & 1 & 97 \end{pmatrix}$$

と定義すれば、上の関係は

$$\overrightarrow{v_n} = M\overrightarrow{v_{n-1}}, \qquad \overrightarrow{v_0} = \begin{pmatrix} 2600 \\ 3400 \\ 4000 \end{pmatrix}$$

と表せる。この初めの関係式より、

$$\overrightarrow{v_n} = M^n\overrightarrow{v_0}$$

であることが判るから、求めるものは、

$$\lim_{n\to\infty} \overrightarrow{v_n}$$

である。

ところで M の固有値[3] は小さい順に $\frac{19}{20}, \frac{24}{25}, 1$ であるから、M のスペクトル分解[4] は

$$M = \frac{19}{20}P_{\frac{19}{20}} + \frac{24}{25}P_{\frac{24}{25}} + 1P_1$$

であり、従って、これより特に、

$$M^n = \left(\frac{19}{20}\right)^n P_{\frac{19}{20}} + \left(\frac{24}{25}\right)^n P_{\frac{24}{25}} + 1^n P_1$$

であることが直ちに判る。ところが、

$$\lim_{n\to\infty} \overrightarrow{v_n} = \lim_{n\to\infty} M^n \overrightarrow{v_0} = \left(\lim_{n\to\infty} M^n\right) \overrightarrow{v_0}$$

であり、

$$\left(\frac{19}{20}\right)^n, \quad \left(\frac{24}{25}\right)^n \quad \to \quad 0 \quad (n \to \infty)$$

であるから、

$$\lim_{n\to\infty} M^n = P_1$$

である。故に、

$$\lim_{n\to\infty} \overrightarrow{v_n} = \left(\lim_{n\to\infty} M^n\right) \overrightarrow{v_0} = P_1 \overrightarrow{v_0}$$

となるから、M の固有値 1 の固有空間への射影行列[5] である P_1 さえ求めればよい。ところがこれは、M の固有値 1 に属する固有ベクトルの 1 つが

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix}$$

[3]3 章 定義 3.3 参照。
[4]4 章 定理 4.1 参照。
[5]射影行列は英語で projection matrix と呼ばれるので P という文字を用いている。

であり、M の共役転置行列[6]M^* の固有値 1 に属する固有ベクトルが

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

であることを利用して、

$$P_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \left\{ (1,1,1) \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix} \right\}^{-1} (1,1,1) = \frac{1}{10} \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot (1,1,1) = \frac{1}{10} \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 5 & 5 & 5 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix}$$

と計算される[7]。

以上によって、十分時間が経過した後の J, K, N, 各大学病院の毎月の診察者数は、

$$\lim_{n \to \infty} \overrightarrow{v_n} = \frac{1}{10} \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 5 & 5 & 5 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2600 \\ 3400 \\ 4000 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2000 \\ 5000 \\ 3000 \end{pmatrix}$$

により、其々、2000 人、5000 人、3000 人、となることが判る。□

この問題を通じて、数学が、数学それ自身の問題のみならず、他分野の問題をも解決するのに有効であることが理解されよう。特に、大学初年次で学ぶ線形代数学における行列とベクトルの概念は、このような社会科学や経営問題にも応用可能であり、また 1・2 年次で学ぶ確率論や統計学等においても必須となる概念でもあり、その重要性は今後も失われることはないであろう。

2.　考察する問題

第 1 章の $\boxed{\text{例題}}$ の $\boxed{\text{解説}}$ でも判るように、実数や複素数を成分にもつ正方行列の冪乗や指数行列の計算[8]において、スペクトル分解 (或いはジョルダン分解) の方

[6] 3 章 定義 3.1 参照

[7] 4 章参照。

[8] これらが求まると、未来が予想できるようになる。即ち、「固有値が未来を決定する」のである。数列の連立漸化式の一般項の表示や常微分方程式・偏微分方程式の解の挙動の考察において、それら

法は有効な役割を果たし、対角化の方法との比較では、かなり簡単に結果に到達できることはよく知られている (笠原 [3], [4], [5]) 。ところが、行列のサイズが大きい場合には、射影行列の計算がやや煩雑になり得る。例えば、5×5 行列で固有値が相異なる 5 個をもつ場合、射影行列を求めるには、5×5 行列の 4 個の積を 5 種類、従って、合計 20 回の積の計算を実行する必要が生じる [9]。インターネットのサイトやエクセルなどを利用すればさほどのこともないだろが、全て手計算で行う場合には非常に煩雑である。このような場合に、射影行列をもう少し簡単に計算する方法はないだろうか。この問題を考える場合に、固有値だけではなく固有ベクトルの情報も必要となるという意味では、固有値だけの情報で計算が完結するスペクトル分解の方法に分があるが、斜交射影によって比較的簡単に射影行列を求めることができるということを、本研究ノートでは、いくつかの例を通じて指摘する。なお、Nagumo[10] に遡る複素積分による射影行列の計算法 (なお、笠原 [5] pp.267-280, 加藤 [6] p.243 も見よ) は、複素解析を知らない大学初年次の学生にとっては、実行するのが難しいであろう。従って、初等的な方法で、かつ、比較的簡単な計算によって、射影行列を求める方法としての斜交射影の方法、が本研究ノートで扱う主題ということになる。

なお、対角化が不能な正方行列の場合にはジョルダン標準形の理論に依ることになるが、そこでは、標準化するための行列の逆行列の計算が一般には必要となる [10]。サイズの大きな行列の逆行列の計算となると、掃き出し法や余因子行列の方法に依らねばならず、手計算でこれを実行するには、やや煩雑である。斜交射影の方法では固有値・(一般) 固有ベクトルの計算は必要ではあるが、必ずしも対角化可能ではない行列の半単純部分に対する射影行列を比較的簡単に求めることができることも指摘する。併せて、スペクトル分解の一般化である一般スペクトル分解 (ジョルダン分解ともいう) を、通常の固有値の情報のみで計算を推し進めるスペクトル分解 [11] により求めることが可能であることもよく知られており、これら 2 つの方法の比較も行う。

漸化式や方程式を生成する行列 (もっと一般には作用素) のスペクトルの情報が本質的である事は広く知られた事実であり、現在も様々な問題に対してそのような立場で研究が進展中である。

[9] 射影行列の総和が単位行列と一致する (単位の分解という) 事実を利用すれば、4 つの射影行列のみ求めて残り 1 つは単位行列との差として求めればよいから、積の計算は最小で 16 回ということにはなる。

[10] 勿論、実対称行列やエルミート行列の場合には、対角化行列として其々、直交行列及びユニタリー行列をとることができ、逆行列の計算は不要となる事もよく知られている。

[11] この場合には固有多項式の逆数の部分分数分解の計算が必要となる。5 章 注意 5.9 を見よ。

本研究ノートの内容は以下の通りである。まず 3 章では、行列に関する基礎的事項を纏める。4 章では、対角化可能な正方行列のスペクトル分解に現れる射影行列を、斜交射影の方法で求める。実対称行列やエルミート行列の場合にはその計算は更に簡単となることにも触れる。続いて 5 章では、対角化不能な正方行列のジョルダン分解に関し、対角化可能な部分のスペクトル分解に現れる射影行列を、斜交射影の方法で求める。

なお以下で扱う例として、n 次正方行列 A の固有値 λ が n 重固有値をもつ場合は取り扱わない。何故ならこの場合には、行列 $A - \lambda I$ (但し、I は n 次単位行列) が冪零行列となる事が Cayley-Hamilton の定理 [12] から従い、これにより元の行列の冪乗や指数行列が容易に計算できるからである (n 次正方行列や単位行列等の用語は次章参照)。

3. 正方行列の基礎的事項

自然数全体の集合を $\mathbb{N}$, 複素数全体の集合を $\mathbb{C}$ と表す。$n \in \mathbb{N}$ として、I は n 次単位行列 ($n \times n$ 単位行列)、$A = (a_{ij})_{1 \leqq i,j \leqq n}$ は n 次正方行列 ($n \times n$ 行列) とする。各成分は複素数であるとする : $a_{ij} \in \mathbb{C}$ ($1 \leqq i,\ j \leqq n$)。また一般に、$k,\ l \in \mathbb{N}$ に対して、成分が複素数の $k \times l$ 行列を $M_{k \times l}(\mathbb{C})$ と表すこととする。特に、$k = 1$ の場合の行列は成分が l 個の横ベクトルと、また $l = 1$ の行列は成分が k 個の縦ベクトルと、其々同一視する。

定義 3.1. $\overline{A} = (\overline{a_{ij}})_{1 \leqq i,j \leqq n} \in M_{n \times n}(\mathbb{C})$ によって、行列 A の各成分の複素共役をとったものを表す。${}^t A = (a_{ji})_{1 \leqq i,j \leqq n} \in M_{n \times n}(\mathbb{C})$ によって、 A の転置行列を表す。A^* によって $A^* = {}^t\overline{A} = (\overline{a_{ji}})_{1 \leqq i,j \leqq n} \in M_{n \times n}(\mathbb{C})$ を、すなわち A の共役転置行列を表す。

定義 3.2. 行列 $A \in M_{n \times n}(\mathbb{C})$ が実対称行列であるとは、$A = (a_{ij})_{1 \leqq i,j \leqq n}$ の各成分が実数 $a_{i,j} \in \mathbb{R}$ ($1 \leqq i, j \leqq n$) であり、かつ $a_{i,j} = a_{j,i}$ ($1 \leqq i, j \leqq n$) が成り立つときをいう。また、A がエルミート行列であるとは $A^* = A$ が成り立つときをいう。

定義 3.3. $\lambda \in \mathbb{C}$ が行列 $A \in M_{n \times n}(\mathbb{C})$ の固有値、$\overrightarrow{v_\lambda} \in M_{n \times 1}(\mathbb{C})$ が A の固有値 λ に属する固有ベクトルであるとは、$A\overrightarrow{v_\lambda} = \lambda\overrightarrow{v_\lambda}$, $\overrightarrow{v_\lambda} \neq \overrightarrow{0}$ が成り立つときをいう。

[12] これは、次章の 定義 3.4 の $\Phi(\lambda)$ に対して $\Phi(A) = 0$ が成り立つことを主張する結果。

定義 3.4. $\Phi(\lambda)$ が行列 $A \in M_{n\times n}(\mathbb{C})$ の固有多項式であるとは

$$\Phi(\lambda) = \left|\lambda I - A\right|$$

のことを指す。ここで右辺の絶対値記号は行列 $\lambda I - A$ の行列式を表す。

この定義において、固有多項式 $\Phi(\lambda)$ は λ の n 次多項式である。

定理 3.5. $\lambda \in \mathbb{C}$ が行列 $A \in M_{n\times n}(\mathbb{C})$ の固有値ならば、${}^tA$ は固有値 λ をもち、A^* は固有値 $\overline{\lambda}$ をもつ。また特に A がエルミート行列の場合、固有値は実数となる。従ってこの場合、A の固有値と A^* の固有値は一致する。

定理 3.6. n 次正方行列 $A \in M_{n\times n}(\mathbb{C})$ が相異なる m 個の固有値 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_m$ $(1 \leqq m \leqq n)$ をもつとする。このとき、A が対角化可能であるための必要十分条件は、全ての $j\,(\in 1,2,3,\cdots,m)$ に対して次が成り立つことである：

$$r_{\lambda_j} = n - m_{\lambda_j}$$

但し、r_{λ_j} は行列 $A - \lambda_j I$ の階数 (ランク)、m_{λ_j} は固有値 λ_j の代数的重複度 (固有多項式の解としての重複度) を、其々表す。

注意 3.7. 定理 3.6 の主張は次のように言い換えることができる：
n 次正方行列 $A \in M_{n\times n}(\mathbb{C})$ が相異なる m 個の固有値 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_m$ $(1 \leqq m \leqq n)$ をもつとする。このとき、A が対角化可能であるための必要十分条件は、A の各固有値 λ_j に対応する固有空間の次元 $n - r_{\lambda_j}$ の $j = 1,2,\cdots,m$ に関する和が次元 n に等しい。

4.　対角化可能な正方行列に対する射影行列の斜交射影による計算

定理 4.1. $m\,(\in \mathbb{N})$ とする。射影行列 $P \in M_{n\times n}(\mathbb{C})$ に対して次が成り立つと仮定する：

(1) P の像空間は m 個の一次独立な縦ベクトルの組 $\overrightarrow{v_j} \in M_{n\times 1}(\mathbb{C})$ $(j = 1,2,\cdots m)$ で張られる線形空間。

(2) P の共役転置行列 P^* の像空間は m 個の一次独立な縦ベクトルの組 $\overrightarrow{w_j} \in M_{n\times 1}(\mathbb{C})$ $(j = 1,2,\cdots m)$ で張られる線形空間。

このとき、P は次で表される：

$$P = X \cdot (Y^* \cdot X)^{-1} \cdot Y^*,$$

但し、行列 X, Y は何れも $n \times m$ 行列であって、次で与えられる：

$$X = \left(\overrightarrow{v_1} \;\; \overrightarrow{v_2} \;\; \cdots \;\; \overrightarrow{v_m}\right), \qquad Y = \left(\overrightarrow{w_1} \;\; \overrightarrow{w_2} \;\; \cdots \;\; \overrightarrow{w_m}\right).$$

注意 4.2. この定理における P は射影の性質 $P^2 = P$ を満たすことが、直接計算により判る。

定理 4.3. 行列 $A \in M_{n\times n}(\mathbb{C})$ は対角化可能 (半単純) であるとし、その相異なる固有値が $\lambda_j \in \mathbb{C}$ $(j = 1, 2, 3, \cdots, m,$ 但し $m \leqq n)$ であるとする。また λ_j の重複度を m_j とする。A の固有値 λ_j に対する一次独立な固有ベクトルを $\overrightarrow{v_{\lambda_{j,1}}}, \overrightarrow{v_{\lambda_{j,2}}} \cdots \overrightarrow{v_{\lambda_{j,m_j}}}$ とする ($m_j = 1$ の場合には一次独立な固有ベクトルの個数は 1 となるが、$m_j \geqq 2$ の場合には一次独立な固有ベクトルの個数は m_j となる。下の例を参照)。そこで行列 $X_{\lambda_j} \in M_{n\times m_j}(\mathbb{C})$ を、これら m_j 個の固有ベクトルを横に並べてできる $n \times m_j$ 行列とする：

$$X_{\lambda_j} = \left(\overrightarrow{v_{\lambda_j,1}} \quad \overrightarrow{v_{\lambda_j,2}} \quad \cdots \quad \overrightarrow{v_{\lambda_j,m_j}}\right) \in M_{n\times m_j}(\mathbb{C}).$$

また A の共役転置行列 $A^* = {}^t\overline{A}$ の固有値 $\overline{\lambda_j} \in \mathbb{C}$ $(j = 1, 2, 3, \cdots, m,\ m \leqq n)$ に属する固有ベクトルを $\overrightarrow{v_{\overline{\lambda_j},1,*}}, \overrightarrow{v_{\overline{\lambda_j},2,*}} \cdots \overrightarrow{v_{\overline{\lambda_j},m_j,*}}$ とする。行列 $X_{\overline{\lambda_j},*} \in M_{n\times m_j}(\mathbb{C})$ を、これら m_j 個の固有ベクトルを横に並べてできる $n \times m_j$ 行列とする：

$$X_{\overline{\lambda_j},*} = \left(\overrightarrow{v_{\overline{\lambda_j},1,*}} \quad \overrightarrow{v_{\overline{\lambda_j},2,*}} \quad \cdots \quad \overrightarrow{v_{\overline{\lambda_j},m_j,*}}\right) \in M_{n\times m_j}(\mathbb{C}).$$

このとき固有値 λ_j の固有空間への射影行列 P_{λ_j} は次で計算される：

$$P_{\lambda_j} = X_{\lambda_j} \cdot \left\{\left(X_{\overline{\lambda_j},*}\right)^* \cdot X_{\lambda_j}\right\}^{-1} \cdot \left(X_{\overline{\lambda_j},*}\right)^*$$

ここで、$\cdot$ は通常の行列としての積を表す。これらを用いて A のスペクトル分解は

$$A = \sum_{j=1}^{m} \lambda_j P_{\lambda_j}$$

で与えられる。

注意 4.4. 上の P_{λ_j} は一般には斜交射影[13] となるが、この後の例 4.7 の場合のように、考える行列に対称性があれば、この P_{λ_j} は直交射影となる。なお、室田・杉原 [12] p.257, 定理 9.51 も参照せよ。

系 4.5. 行列 $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ が実対称行列の場合には、A の固有値 λ_j の固有空間への射影行列 P_{λ_j} は次で計算される：

$$P_{\lambda_j} = X_{\lambda_j} \cdot {}^t X_{\lambda_j}.$$

また、$A \in M_{n\times n}(\mathbb{C})$ がエルミート行列の場合には、A の固有値 λ_j の固有空間への射影行列 P_{λ_j} は次で計算される：

$$P_{\lambda_j} = X_{\lambda_j} \cdot \left(X_{\lambda_j}\right)^*.$$

注意 4.6. この結果に関しては、例えば、西尾 [11] p.123, 定理 6.15, 室田・杉原 [12] p.257, 定理 9.50 等を参照のこと。

例 4.7. 3×3 実対称行列 $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ のスペクトル分解を求める。固有値は 1, 2, 4, 其々の正規化された固有ベクトルの 1 つは

$$\overrightarrow{v_1} = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad \overrightarrow{v_2} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \qquad \overrightarrow{v_4} = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

となる。また、共役転置行列 $A^* = A$ であるから、

$$\overrightarrow{v_{1,*}} = \overrightarrow{v_1}, \qquad \overrightarrow{v_{2,*}} = \overrightarrow{v_2}, \qquad \overrightarrow{v_{4,*}} = \overrightarrow{v_4}$$

である。そこで、行列 X_k, $X_{k,*}$, $(k = 1, 2, 4)$ を次で定義する：

$$X_1 = X_{1,*} = \overrightarrow{v_1}, \qquad X_2 = X_{2,*} = \overrightarrow{v_2}, \qquad X_4 = X_{4,*} = \overrightarrow{v_4}.$$

---

[13] n 次正方行列 P が $P^2 = P$, $P^* = P$ を満たすとき、この P を直交射影というのに対し、$P^2 = P$ だが $P^* \neq P$ であるような行列 P を斜交射影という。柳井・竹内 [13], p.26, 注意 参照。

このとき、各固有ベクトルは正規化されているから、$k = 1, 2, 4$ に対して

$$(X_{k,*})^* \cdot X_k = 1$$

が、従って、

$$\{(X_{k,*})^* \cdot X_k\}^{-1} = 1$$

が成り立つ。故に、

$$P_1 = X_1 \cdot (X_1)^* = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}}(1, -1, 1) = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix},$$

$$P_2 = X_2 \cdot (X_2)^* = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 0, -1) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$P_4 = X_4 \cdot (X_4)^* = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{\sqrt{6}}(1, 2, 1) = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix},$$

として、A のスペクトル分解は $A = 1P_1 + 2P_2 + 4P_4$ となる。

注意 4.8. 正規化された固有ベクトルとしたのは、斜交射影の計算で $\{\cdots\}^{-1}$ の部分が必ず 1 (或いは単位行列) となるからである。これにより、上の系が納得されよう。

例 4.9. 3×3 行列 $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 6 \\ -1 & -2 & -4 \\ 1 & 1 & -3 \end{pmatrix}$ のスペクトル分解を求める。固有値は $-3, -2, 2$, 其々の固有ベクトルの 1 つは

$$\overrightarrow{v_{-3}} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}, \qquad \overrightarrow{v_{-2}} = \begin{pmatrix} 4 \\ -5 \\ -1 \end{pmatrix}, \qquad \overrightarrow{v_2} = \begin{pmatrix} 8 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

となる。また、共役転置行列 $A^* = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 2 & -2 & 6 \\ -4 & 1 & -3 \end{pmatrix}$ の固有値も -3, -2, 2 であり、それぞれの固有ベクトルの 1 つは

$$\overrightarrow{v_{-3,*}} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -7 \end{pmatrix}, \qquad \overrightarrow{v_{-2,*}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}, \qquad \overrightarrow{v_{2,*}} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

となる。従って、

$$P_{-3} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot \left\{ (2,3,-7) \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}^{-1} \cdot (2,3,7) = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 4 & 6 & 14 \\ -4 & -6 & 14 \\ -2 & -3 & -7 \end{pmatrix},$$

$$P_{-2} = \begin{pmatrix} 4 \\ -5 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot \left\{ (1,2,-2) \begin{pmatrix} 4 \\ -5 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}^{-1} \cdot (1,2,-2) = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 4 & 8 & -4 \\ -5 & -10 & 10 \\ -1 & -2 & 2 \end{pmatrix},$$

$$P_{2} = \begin{pmatrix} 8 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \left\{ (3,2,2) \begin{pmatrix} 8 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}^{-1} \cdot (3,2,2) = \frac{1}{20} \begin{pmatrix} 24 & 16 & 16 \\ -9 & -6 & -6 \\ 3 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

として、A のスペクトル分解は $A = (-3)P_{-3} + (-2)P_{-2} + 2P_2$ となる。

注意 4.10. 純粋にスペクトル分解の方法に依る場合には、

$$P_{-3} = \frac{(A+2I)\cdot(A-2I)}{(-3+2)(-3-2)},$$

$$P_{-2} = \frac{(A-2I)\cdot(A+3I)}{(-2-2)(-2+3)},$$

$$P_{2} = \frac{(A+3I)\cdot(A+2I)}{(2+3)(2+2)}$$

を計算しなければならず、やや煩雑となる。

例 4.11. 3×3 行列 $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 1\\ -1 & 4 & 1\\ 2 & -4 & 0\end{pmatrix}$ のスペクトル分解を求める。固有値は 1 と 2 (2 重固有値). $A-I$ のランクは 2 となり、

$$2\left[\leftarrow \text{行列 } A-I \text{ のランク}\right]=3\left[\leftarrow 3\times 3 \text{ の } 3\right]-1\left[\leftarrow \text{固有値 } 1 \text{ の重複度}\right]$$

は成立。同様に、$A-2I$ のランクは 1 となり、

$$1\left[\leftarrow \text{行列 } A-2I \text{ のランク}\right]=3\left[\leftarrow 3\times 3 \text{ の } 3\right]-2\left[\leftarrow \text{固有値 } 2 \text{ の重複度}\right]$$

も成立。従って、この行列 A は対角化可能で、其々の固有ベクトルの 1 つは、

$$\overrightarrow{v_1}=\begin{pmatrix}1\\1\\-2\end{pmatrix},\qquad \overrightarrow{v_{2,1}}=\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix},\qquad \overrightarrow{v_{2,2}}=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$$

となる。また、共役転置行列 $A^*=\begin{pmatrix}1 & -1 & 2\\ 2 & 4 & -4\\ 1 & 1 & 0\end{pmatrix}$ の固有値も 1 と 2 (2 重固有値) であり、それぞれの固有ベクトルの 1 つは、

$$\overrightarrow{v_{1,*}}=\begin{pmatrix}1\\-2\\-1\end{pmatrix},\qquad \overrightarrow{v_{2,1,*}}=\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix},\qquad \overrightarrow{v_{2,2,*}}=\begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix}$$

となる。そこで、行列 X_k, $X_{k,*}$ $(k=1,\,2)$ を次で定義する：

$$X_1=\overrightarrow{v_1}=\begin{pmatrix}1\\1\\-2\end{pmatrix},\qquad X_{1,*}=\overrightarrow{v_{1,*}}=\begin{pmatrix}1\\-2\\-1\end{pmatrix},$$

$$X_2=\begin{pmatrix}\overrightarrow{v_{2,1}} & \overrightarrow{v_{2,2}}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix},\qquad X_{2,*}=\begin{pmatrix}\overrightarrow{v_{2,1,*}} & \overrightarrow{v_{2,2,*}}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 2\\ -1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}.$$

従って、

$$P_1 = X_1 \cdot \left\{ \left(X_{1,*}\right)^* \cdot X_1 \right\}^{-1} \cdot \left(X_{1,*}\right)^*$$

$$= \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \cdot \left\{ (1,-2,1) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \right\}^{-1} \cdot (1,-2,-1) = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 1 & -2 & -1 \\ -2 & 4 & 2 \end{pmatrix},$$

$$P_2 = X_2 \cdot \left\{ \left(X_{2,*}\right)^* \cdot X_2 \right\}^{-1} \cdot \left(X_{2,*}\right)^*$$

$$= \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \left\{ \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ -1 & 3 & 1 \\ 2 & -4 & -1 \end{pmatrix},$$

として、A のスペクトル分解は $A = 1P_1 + 2P_2$ となる。

注意 4.12. この行列に関しては、純粋にスペクトル分解の方法によって射影行列を求めたほうが簡単である。実際、対角化可能であることさえ確認できれば、それ以降は

$$P_1 = \frac{A-2I}{1-2}, \qquad P_2 = \frac{A-I}{2-1}$$

として計算すればよいからである。

例 4.13. $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ の固有値は $0, \pm i, \pm 2i$ であり、其々の固有ベ

クトルの 1 つは、

$$\overrightarrow{v_0}=\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\\0\end{pmatrix},\qquad \overrightarrow{v_{\pm i}}=\begin{pmatrix}0\\\pm i\\0\\1\\0\end{pmatrix},\qquad \overrightarrow{v_{\pm 2i}}=\begin{pmatrix}\pm i\\0\\0\\0\\1\end{pmatrix},$$

となる。従って、A の共役転置行列 $A^*=\begin{pmatrix}0&0&0&0&2\\0&0&0&1&0\\0&0&0&0&0\\0&-1&0&0&0\\-2&0&0&0&0\end{pmatrix}$ の固有値は $0, \overline{\pm i}=\mp i, \overline{\pm 2i}=\mp 2i$ であり、其々の固有ベクトルの 1 つは、

$$\overrightarrow{v_{0,*}}=\overrightarrow{v_0},\qquad \overrightarrow{v_{\mp i,*}}=\begin{pmatrix}0\\\pm i\\0\\1\\0\end{pmatrix}=-\overrightarrow{v_{\pm i}},\qquad \overrightarrow{v_{\mp 2i,*}}=\begin{pmatrix}\pm i\\0\\0\\0\\1\end{pmatrix}=-\overrightarrow{v_{\pm 2i}}$$

となる。従って、射影行列は (ベクトルと行列を同一視して)、

$$P_0=\overrightarrow{v_0}\left\{\left(\overrightarrow{v_{0,*}}\right)^*\cdot\overrightarrow{v_0}\right\}^{-1}\cdot\left(\overrightarrow{v_{0,*}}\right)^*$$

$$=\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\\0\end{pmatrix}\left\{(0,0,1,0,0)\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\\0\end{pmatrix}\right\}^{-1}(0,0,1,0,0)=\begin{pmatrix}0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\\0&0&1&0&0\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\end{pmatrix},$$

$$P_{\pm i} = \overrightarrow{v_{\pm i}} \Big\{ \big(\overrightarrow{v_{\mp i,*}}\big)^* \cdot \overrightarrow{v_{\pm i}} \Big\}^{-1} \cdot \big(\overrightarrow{v_{\mp i,*}}\big)^*$$

$$= \begin{pmatrix} 0 \\ \pm i \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \left\{ (0, \mp i, 0, 1, 0) \begin{pmatrix} 0 \\ \pm i \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}^{-1} (0, \mp i, 0, 1, 0) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \pm i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mp i & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$P_{\pm 2i} = \overrightarrow{v_{\pm 2i}} \Big\{ \big(\overrightarrow{v_{\mp 2i,*}}\big)^* \cdot \overrightarrow{v_{\pm 2i}} \Big)^{-1} \cdot \big(\overrightarrow{v_{\mp 2i,*}}\big)^*$$

$$= \begin{pmatrix} \pm i \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \left\{ (\mp i, 0, 0, 0, 1) \begin{pmatrix} \pm i \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}^{-1} (\mp i, 0, 0, 0, 1) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \pm i \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \mp i & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

となり、A のスペクトル分解は

$$A = 0P_0 + iP_i + (-i)P_{-i} + 2iP_{2i} + (-2i)P_{-2i} = iP_i + (-i)P_{-i} + 2iP_{2i} + (-2i)P_{-2i}$$

で与えられる。

注意 4.14. 例 4.10 の行列 A に対する射影行列をスペクトル分解の方法で求めようと思えば、次のような 5×5 行列の積の計算を実行することとなる：

$$P_0 = \frac{(A - iI)(A + iI)(A - 2iI)(A + 2iI)}{(0 - i)(0 + i)(0 - 2i)(0 + 2i)},$$

$$P_i = \frac{(A + iI)(A - 2iI)(A + 2iI)(A + 0I)}{(i + i)(i - 2i)(i + 2i)(i - 0)},$$

$$P_{-i} = \frac{(A-2iI)(A+2iI)(A-0I)(A-iI)}{(-i-2i)(-i+2i)(-i-0)(-i-i)},$$

$$P_{2i} = \frac{(A+2iI)(A-0I)(A-iI)(A+iI)}{(2i+2i)(2i-0)(2i-i)(2i+i)},$$

$$P_{-2i} = \frac{(A-0)(A-iI)(A+iI)(A-2iI)}{(-2i-0)(-2i-i)(-2i+i)(-2i-2i)}$$

例 4.15. $A = \begin{pmatrix} 2 & -2i & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ -i & 0 & 2 \end{pmatrix}$ の固有値は 2, $1+i$, $3-i$ であり、これらの固有ベクトルとして例えば以下の様なものを選ぶことができる：

$$\overrightarrow{v_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ i \\ -1 \end{pmatrix}, \qquad \overrightarrow{v_{1+i}} = \begin{pmatrix} 1+i \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \qquad \overrightarrow{v_{3-i}} = \begin{pmatrix} 1+i \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

また $A^* = \begin{pmatrix} 2 & 0 & i \\ 2i & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ の固有値は 2, $\overline{1+i}\,(=1-i)$, $\overline{3-i}\,(=3+i)$ であり、これらの固有ベクトルとして例えば以下のものを選ぶことができる：

$$\overrightarrow{v_{2,*}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \overrightarrow{v_{1+i,*}} = \begin{pmatrix} 1+i \\ -2i \\ -2 \end{pmatrix}, \qquad \overrightarrow{v_{3-i,*}} = \begin{pmatrix} 1+i \\ 2i \\ 2 \end{pmatrix}.$$

従って、固有射影は、

$$P_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ i \\ -1 \end{pmatrix} \cdot \left\{ (0,1,0) \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ i \\ -1 \end{pmatrix} \right\}^{-1} \cdot (0,1,0) = -i \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix},$$

$$P_{1+i} = \begin{pmatrix} 1+i \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot \left\{ (1-i, 2i, -2) \cdot \begin{pmatrix} 1+i \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}^{-1} \cdot (1-i, 2i, -2)$$

$$= \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 2 & -2+2i & -2-2i \\ 0 & 0 & 0 \\ -1+i & -2i & 2 \end{pmatrix}$$

$$P_{3-i} = \begin{pmatrix} 1+i \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \left\{ (1-i, -2i, 2) \cdot \begin{pmatrix} 1+i \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}^{-1} \cdot (1-i, 2i, 2)$$

$$= \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 2 & 2-2i & 2+2i \\ 0 & 0 & 0 \\ 1-i & -2i & 2 \end{pmatrix}$$

となり、A のスペクトル分解は

$$A = 2P_2 + (1+i)\, P_{1+i} + (3-i)\, P_{3-i}$$

となる。

5. 対角化不能な正方行列の半単純部分に対する射影行列の斜交射影による計算

n 次正方行列 $A \in M_{n\times n}(\mathbb{C})$ は対角化不能であるとする。この場合には、射影を構成する際に、一般固有空間のベクトルを選べばよい。この事情を説明するために以下で少し準備をする。

まず一般スペクトル分解 (ジョルダン分解ともいう [14]) に関して、よく知られている結果を述べると次のようになる：

定理 5.1. n 次正方行列 $A \in M_{n\times n}(\mathbb{C})$ は対角化不能とし、相異なる m 個の固有値 λ_j (重複度は $m_j,\ j = 1, 2, \cdots, m,\ m \leqq n$) をもつとする。このとき次が成立：

[14] 笠原 [3] p. 200, 定義 10.13 参照。

A は一般スペクトル分解できる。即ち、対角化可能な n 次正方行列 S と冪零行列 N がただ 1 組存在して

$$A = S + N, \qquad S = \sum_{j=1}^{m} \lambda_j P_j, \qquad N^p = O \quad (p = \max\{m_1, m_2, \cdots, m_m\})$$

が成り立つ。また、S と N は共に A のある多項式として其々表され、従って互いに可換である：$SN = NS$. ここで、行列 $P_j \in M_{n\times n}(\mathbb{C})$ $(j = 1, 2, \cdots, m)$ は次を満たす：

(1) 各 P_j $(j = 1, 2, \cdots, m)$ は射影である。即ち、次が成り立つ：

$$P_j^2 = P_j, \quad (j, j \in \{1, 2, \cdots, m\})$$

$$P_j \cdot P_l = P_l \cdot P_j = O\,(O\text{ は }n\text{ 次零行列を表す}) \ \ (j \neq l,\ j, l \in \{1, 2, \cdots, m\})\,.$$

(2) $I = \sum_{j=1}^{m} P_j$ (単位の分解) が成り立つ。

(3) $(A - \lambda_j I)^{m_j} P_j = O$ が成り立つ。 従って、各 P_j の像空間は A の固有値 λ_j に対する一般固有空間と一致する。

注意 5.2. 対角化不能な正方行列の一般スペクトル分解分解に関しては、例えば、笠原 [3] pp. 197-200, [4] pp.38-39, [5] pp. 243-245, 韓・伊理 [7] p.105, 定理 4.5, シャトラン [8] p.21, 定理 1.7.1 等を参照のこと。

定理 5.1 の証明には、次の結果が必要となる：

定理 5.3. 任意の n 次正方行列 $A \in M_{n\times n}(\mathbb{C})$ の相異なる m 個の固有値 λ_j に対する一般固有空間 (一般化固有空間、或いは、広義固有空間とも呼ばれる) を V_j $(j = 1, 2, \cdots, m,\ m \leqq n)$ とすると、$\mathbb{C}^n$ は各 V_j の直和として表せる：

$$\mathbb{C}^n = \oplus_{j=1}^{m} V_j.$$

定理 5.3 は、多くの文献では、固有多項式に関わる 1 の分割や固有多項式の逆数の部分分数分解といった手法を用いて証明される (例えば 笠原 [3] 等を見よ)。ところで、飯高・岩堀 [1] pp.127-128 や、上坂・塚田 [2] pp.179-181, 及び、塚田・金

子・小林・高橋・野口 [9] pp. 226-227 では、定理 5.3 が、一般固有ベクトルのみの議論により証明されている。この議論に基づいて、まず与えられた行列の固有値と一般固有ベクトルを求め、次に、ベクトル空間 $\mathbb{C}^n$ の一般固有空間による直和分解を考え、その後で各一般固有空間上への射影として定理 4.1 で述べた形の射影を考えることにより、与えられた正方行列の一般スペクトル分解を得ることも可能であり、その結果を纏めると次のようになる：

定理 5.4. n 次正方行列 $A \in M_{n\times n}(\mathbb{C})$ は対角化不能とし、相異なる m 個の固有値 λ_j (重複度は $m_j,\ j = 1, 2, \cdots, m,\ m \leqq n$) をもつとする。このとき次が成り立つ：

A の各固有値 λ_j (重複度は m_j) に関する一般固有空間 V_j に属する一次独立な一般固有ベクトルを横に並べてできる $n \times m_j$ 行列を $X_j \in M_{n\times m_j}(\mathbb{C})$ とし、A^* の各固有値 λ_j (重複度は同様に m_j となる) に関する一般固有空間に属する一次独立な一般固有ベクトルを横に並べてできる $n \times m_j$ 行列を $X_{j,*} \in M_{n\times m_j}(\mathbb{C})$ とする。これらに対して n 次正方行列 P_j を

$$P_j = X_j \cdot \{(X_{j,*})^* \cdot X_j\}^{-1} \cdot (X_{j,*})^* \qquad (j = 1, 2, \cdots, m_j)$$

で定義すると、各 P_j は一般固有空間 V_j への射影であり、A の半単純部分は

$$S = \sum_{j=1}^{m} \lambda_j P_j$$

で与えられる。更に、このとき $N = A - S$ は冪零行列となる。

以下では、対角化不能な行列の一般スペクトル分解を、定理 5.4 を用いて求めてみる。

例 5.5. $A = \begin{pmatrix} 0 & -3 & 10 \\ 1 & 4 & 2 \\ -1 & -3 & -5 \end{pmatrix}$ の固有値は -1 (2 重固有値) と 1 であり、$A + I$ のランクは 2 となるから、

$$2\left[\leftarrow \text{行列 } A+I \text{ のランク}\right] \neq 3\left[\leftarrow 3\times 3 \text{ の } 3\right] - 2\left[\leftarrow \text{固有値 } 2 \text{ の重複度}\right]$$

となり、この行列 A は対角化不能である。固有値 -1 の固有ベクトルの 1 つは通常の方法により

$$\overrightarrow{v_{-1}} = \begin{pmatrix} -7 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

と判る。次に一般化された固有空間に属するベクトル $\overrightarrow{w_{-1}}$ を、

$$(A+I)\,\overrightarrow{w_{-1}} = \overrightarrow{v_{-1}}$$

を満たすものとして求めると、そのようなものの 1 つとして、

$$\overrightarrow{w_{-1}} = \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

を得る。また、固有値 1 の固有ベクトルの 1 つとして、

$$\overrightarrow{v_1} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

を得る。A の共役転置行列 A^* に対しても同様の作業を実行して、固有値 -1 (2 重固有値) の固有ベクトルの 1 つとして、

$$\overrightarrow{v_{-1,*}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

を得る。また一般化された固有空間に属するベクトルの 1 つとして、

$$\overrightarrow{w_{-1,*}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}$$

を得る。最後に、固有値 1 の固有ベクトルの 1 つとして、

$$\overrightarrow{v_{1,*}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$$

が見つかる。そこで、まず固有値 1 の固有空間への射影行列 P_1 は、

$$P_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \left\{ (1,4,3) \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}^{-1} \cdot (1,4,3) = \begin{pmatrix} -3 & -12 & -9 \\ 1 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

となる。

次に、固有値 -1 に属する固有空間への射影行列を求める。そのために、$X_{-1} \in M_{3\times 2}(\mathbb{C})$ として、$\overrightarrow{v_{-1}}$ と $\overrightarrow{w_{-1}}$ を 2 つ横に並べてできる行列を考える：

$$X_{-1} = \begin{pmatrix} \overrightarrow{v_{-1}} & \overrightarrow{w_{-1}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 & -4 \\ 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

同様に、$X_{-1,*} \in M_{3\times 2}(\mathbb{C})$ として、$\overrightarrow{v_{-1,*}}$ と $\overrightarrow{w_{-1,*}}$ を 2 つ横に並べてできる行列を考える：

$$X_{-1,*} = \begin{pmatrix} \overrightarrow{v_{-1,*}} & \overrightarrow{w_{-1,*}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 3 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}.$$

これらを用いて 2 重固有値 -1 の固有空間への射影行列 P_{-1} を、

$$P_{-1} = X_{-1}\left\{ \left(X_{-1,*}\right)^* \cdot X_{-1} \right\}^{-1} \cdot \left(X_{-1,*}\right)^*$$

で定めると、

$$\begin{aligned} P_{-1} &= \begin{pmatrix} -7 & -4 \\ 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -7 & -4 \\ 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -7 & -4 \\ 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 12 & 9 \\ -1 & -3 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

となる。このとき確かに、

$$P_{-1} + P_1 = I, \qquad P_{-1}^2 = P_{-1}, \qquad P_1^2 = P_1, \qquad P_{-1} \cdot P_1 = P_1 \cdot P_{-1} = O$$

が成り立っている。

これより、A の半単純部分 S は、

$$S = \{(-1)P_{-1} + 1P_1\} = \begin{pmatrix} -7 & -24 & -18 \\ 2 & 7 & 6 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

であり、冪零部分 N は、

$$N = A - S = \begin{pmatrix} 7 & 21 & 28 \\ -1 & -3 & -4 \\ -1 & -3 & -4 \end{pmatrix}$$

となる。この N は確かに、$N^2 = O$ を、従って、$N^k = O\ (k = 2, 3, \cdots)$ を満たす。

以上によって、A の一般スペクトル分解は、

$$A = S + N, \qquad S = (-1)P_{-1} + 1P_1,$$

但し、

$$P_{-1} = \begin{pmatrix} 4 & 12 & 9 \\ -1 & -3 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad P_1 = \begin{pmatrix} -3 & -12 & -9 \\ 1 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad N = \begin{pmatrix} 7 & 21 & 28 \\ -1 & -3 & -4 \\ -1 & -3 & -4 \end{pmatrix}$$

となる。

注意 5.6. 例 5.5 における行列 A のジョルダン分解を、純粋にスペクトル分解の方法のみで求めようとすれば、固有多項式

$$\Phi(\lambda) = \left|\lambda I - A\right| = (\lambda + 1)^2 (\lambda - 1)$$

の逆数を部分分数分解する必要がある。

$$\frac{1}{(\lambda+1)^2(\lambda-1)} = \frac{-\frac{1}{4}(\lambda+3)}{(\lambda+1)^2} + \frac{\frac{1}{4}}{\lambda - 1} \Leftrightarrow 1 = -\frac{1}{4}(\lambda+3)(\lambda-1) + \frac{1}{4}(\lambda+1)^2$$

となるから、

$$P_{-1} = -\frac{1}{4}(A+3I)\cdot(A-I), \qquad P_1 = \frac{1}{4}(A+I)^2$$

として、A の半単純部分 S が

$$S = (-1)P_{-1} + 1P_1$$

として求められる。なおこうして計算された P_{-1}, P_1 が先の 例 5.5 における結果と一致することも判る。

謝辞　有益なコメントを下さった、貝塚公一氏 (日本医科大学 医学部 基礎科学数学教室) に対して、この場を借りて感謝申し上げます。

参考文献

[1] 飯高茂・岩堀長慶, 楽しく学ぶ線形代数, 紀伊國屋書店 (1987)

[2] 上坂吉則・塚田真, 入門 線形代数, 近代科学社 (1987)

[3] 笠原晧司, 線形代数学 (サイエンスライブラリ 25), サイエンス社 (1982).

[4] 笠原晧司, 行列の構造 (現代応用数学の基礎) 日本評論社 (1994).

[5] 笠原晧司, 線形代数と固有値問題 スペクトル分解を中心に (新装版改訂増補), 現代数学社 (2019).

[6] 加藤敏夫, 行列の摂動 (シュプリンガー数学クラシックス), シュプリンガー・フェアラーク東京 (1999).

[7] 韓太舜・伊理正夫, ジョルダン標準形 (新装版) UP 応用数学選書 8, 東京大学出版会 (2018).

[8] F. シャトラン (伊理正夫・伊理由美 訳), 行列の固有値 新装版 最新の解法と応用, 丸善出版 (2012).

[9] 塚田真・金子博・小林美治・高橋眞映・野口将人, Python で学ぶ線形代数学, オーム社 (2020)

[10] Mitio Nagumo, *Einige analytische Untersuchungen in liniaren, matrischen Ringen*, Japanese journal of mathematics 13, pp. 61-80 (1936).

[11] 西尾克義, 理工系のための線形代数, 学術図書出版社 (2003).

[12] 室田一雄・杉原正顯, 東京大学工学教程 基礎系 線形代数 I, 東京大学工学教程編纂委員会 編, 丸善出版 (2015)

[13] 柳井晴夫・竹内啓, 射影行列・一般逆行列・特異値分解 (新装版) UP 応用数学選書 10, 東京大学出版会 (2018).

(受付日　令和5年 12月29日)

(受理日　令和6年　3月　5日)