〈総説〉

対称空間上の不変微分作用素に対する数学的散乱理論

貝塚 公一*

Mathematical scattering theory for invariant differential operators on symmetric spaces

Koichi KAIZUKA*

1　序

数学の中心的な研究対象の一つとして “対称性” という概念がある. 例えば, 相異なる有限個の要素を一列に並べて考える ($1, 2, 3, \ldots, n$ という数の組等). そして, それらの要素の並び方を入れ替える操作を考えると, その操作全体は “群” と呼ばれる数学的対象を成す. 相異なる有限個の要素を入れ替える操作全体から成る群は (有限) 置換群と呼ばれる. また, 平坦なユークリッド空間で 2 点間の距離を変えない変換 (等長変換と呼ばれる) を考えると, その変換は平行移動と原点を中心とする反転, 回転を組み合わせて得られることが分かる. このユークリッド空間の等長変換全体をユークリッド運動群と呼ぶ. 空間があれば, その空間特有の対称性を保つ変換規則として変換群が現れ, 一方で変換群が与えられたときに, どの様な空間に作用するかということを考えるのは自然な問題である. このように, “空間の持つ対称性を記述する群” と “群が与えられたときに, どの様な空間に作用するか” という問題を研究する数学の分野の一つとして “表現論” という分野がある. 表現論は数学の代数, 幾何, 解析のすべてにまたがる広大な研究分野である. 表現論の研究対象の一つとして, 微分方程式の解 (あるいは解が成す空間) が持つ対称性を考察する問題が研究されている. 表現論は物理学, 特に量子力学とも深いかかわりを持っている. 例えば, 歴史的に有名な典型例として水素原子を記述する微分方程式 (シュレディンガー方程式) が挙げられる. 水素原子を記述するシュレディンガー方程式は原点を中心とする回転対称性を持っており, 水素原子の束縛状態を表す波動関数の角運動量は回転群に付随す

*日本医科大学・数学教室　Department of Mathematics, Nippon Medical School

る“表現”を用いて記述され, “表現”を用いた分解が水素原子のスペクトル分解 (対角化) に相当することが知られている. その一方で, (電場ポテンシャルがない場合の) 自由電子の散乱状態を記述する自由シュレディンガー方程式に対しては, フーリエ変換を用いてスペクトル分解 (対角化) が可能であることが知られている. このフーリエ変換もユークリッド運動群のもつ群としての性質から導かれる“平面波”により記述されていると解釈することが出来る. 数学的散乱理論とは, 例えば散乱状態にある電磁場中の量子力学的粒子に対して, (無限) 遠方から粒子が入射した場合, どの様に散乱されるかを解析する理論である (数学的散乱理論のより詳しい解説については, 例えば中澤 [1] を参照せよ.) また, 電磁場が無い場合であっても, 空間自体が曲がっている場合には, その曲がり方に応じて量子力学的粒子の散乱が生じる. 空間の曲がりに応じた量子力学的粒子の散乱の解析もまた数学的散乱理論 (あるいは幾何学的散乱理論) と呼ばれる.

ユークリッド空間を等長変換という幾何学的対称性に着目して一般化すると, 対称空間という綺麗に曲がった空間が得られる. その中でも, 双曲平面の様に負に曲がった空間を非コンパクト型対称空間と呼ぶ. 非コンパクト型対称空間上ではリー群が等長変換として作用し, リー群の構造に基づいた調和解析が研究されている. その中でも, 最も重要な研究分野の一つが等長変換に対して不変となる微分作用素の構造, あるいはその微分作用素の固有関数から成る関数空間の解析である. より正確にいえば, 全ての不変微分作用素にたいする固有関数 (同時固有関数) から成る関数空間を考えると, その関数空間には等長変換群が自然に作用し, 等長変換群の表現空間となる. そして, その表現の諸性質を調べることが調和解析において中心的な問題となる. 本稿では, 非コンパクト型対称空間上の調和解析と表現論に基づいた, 同時固有関数に対する数学的散乱理論について, 著者の研究結果を交えて解説する.

2 ユークリッド空間における量子力学的自由粒子の定常散乱

本節では, ユークリッド空間における量子力学的自由粒子の定常散乱理論について基本的な結果を振り返る. $\mathbb{R}^n$ を n 次元ユークリッド空間とする. また, $\mathbb{R}^n$ の点を $x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 等と表す. $\Delta_{\mathbb{R}^n}$ を以下で定義されるユークリッド空間上のラプラシアンとする.

$$\Delta_{\mathbb{R}^n}=\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial^2}{\partial x_j^2}.$$

形式的には, ユークリッド空間における量子力学的自由粒子の定常状態はラプラシアンの一般化固有関数として表される. 自由 Schrödinger 作素 $\boldsymbol{H}_0 = -\Delta_{\mathbb{R}^n}$ は

$$\mathcal{D}(\boldsymbol{H}_0) = \{f \in L^2(\mathbb{R}^n); \Delta_{\mathbb{R}^n} f \in L^2(\mathbb{R}^n)\}$$

を定義域とする $L^2(\mathbb{R}^n)$ 上の自己共役作用素として実現される. このとき, $\boldsymbol{H}_0$ のスペクトルに対しては $\sigma(\boldsymbol{H}_0) = \sigma_{\mathrm{ac}}(\boldsymbol{H}_0) = [0, \infty)$ が成り立つことが良く知られている. そして, 各スペクトルはスペクトルパラメータ $\kappa \in \mathbb{R}$ により, κ^2 と表される. 以下では, ユークリッド空間上の調和解析の立場から, $\kappa \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ の場合の Agmon-Hörmander [2] による一般化固有関数の特徴付けと, 閾値 (すなわち $\kappa = 0$ の場合) に付随する一般化固有関数の特徴付けについて振り返る.

始めに, ユークリッド空間上の Agmon-Hörmander 型の関数空間を導入する. 全空間 $\mathbb{R}^n$ を原点からのユークリッド距離 $|x| = (x_1^2 + \cdots + x_n^2)^{1/2}$ に応じて以下のように 2 進分解する.

$$\begin{aligned} \Omega_0 &= \{x \in \mathbb{R}^n; |x| < 1\}, \\ \Omega_j &= \{x \in \mathbb{R}^n; 2^{j-1} \leqslant |x| < 2^j\} \quad (j \in \mathbb{N}). \end{aligned}$$

また, 各集合 Ω_j に対する特性関数を χ_{Ω_j} と表す. $\sigma > 0$, $f \in L^2_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$ に対して, ノルム $\|\cdot\|_{B_\sigma(\mathbb{R}^n)}$ を以下で定義する.

$$\|f\|_{B_\sigma(\mathbb{R}^n)} = \sum_{j=0}^{\infty} 2^{\sigma j} \left\|\chi_{\Omega_j} f\right\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}.$$

このとき,

$$B_\sigma(\mathbb{R}^n) = \left\{f \in L^2_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n); \|f\|_{B_\sigma(\mathbb{R}^n)} < \infty\right\}$$

とおくと, ノルム空間 $(B_\sigma(\mathbb{R}^n), \|\cdot\|_{B_\sigma(\mathbb{R}^n)})$ は Banach 空間となる. また, Banach 空間 $B_\sigma(\mathbb{R}^n)$ の双対空間は以下のように実現される: ノルム $\|\cdot\|_{*,\sigma}$ を以下で定義する:

$$\|f\|_{*,\sigma} = \sup_{R>1} \frac{1}{R^\sigma} \left(\int_{|x|<R} |f(x)|^2 dx\right)^{1/2}.$$

そして,

$$B^*_\sigma(\mathbb{R}^n) = \{f \in L^2_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n); \|f\|_{*,\sigma} < \infty\}$$

とおくとノルム空間 $(B^*_\sigma(\mathbb{R}^n), \|\cdot\|_{*,\sigma})$ は Banach 空間となり, 自然に $B^*_\sigma(\mathbb{R}^n)$ の双対空間の実現となる. また, $\kappa \in \mathbb{C}$ に対して

$$\mathcal{E}_\kappa(\mathbb{R}^n) = \{f \in C^\infty(\mathbb{R}^n); -\Delta_{\mathbb{R}^n} f = \kappa^2 f\}$$

とおく. このとき, ラプラシアンがユークリッド運動群に関して不変な微分作用素であることから, 関数空間 $\mathcal{E}_\kappa(\mathbb{R}^n)$ はユークリッド運動群による変換に関して閉じており, その表現空間となっている. $\kappa \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ に対して, $\mathcal{E}_\kappa(\mathbb{R}^n)$ の部分空間 $\mathcal{E}^2_\kappa(\mathbb{R}^n)$ を以下で定義する.

$$\mathcal{E}^2_\kappa(\mathbb{R}^n) = \left\{ f \in \mathcal{E}_\kappa(\mathbb{R}^n); \|f\|_{*,1/2} < \infty \right\}.$$

このとき, ノルム空間 $(\mathcal{E}^2_\kappa(\mathbb{R}^n), \|\cdot\|_{*,1/2})$ は Banach 空間となる. また, ノルム $\|\cdot\|_{*,1/2}$ の定義に着目すると, 新たに定義した関数空間 $\mathcal{E}^2_\kappa(\mathbb{R}^n)$ もユークリッド運動群の表現空間となることが分かる.

定義 2.1. Banach 空間 $(B^*_\sigma(\mathbb{R}^n), \|\cdot\|_{*,\sigma})$ において同値関係 $\simeq$ を以下で定義する[1)]:

$$f_1 \simeq f_2 \ \text{ in } \ B^*_\sigma(\mathbb{R}^n) :\Longleftrightarrow \lim_{R\to\infty} \frac{1}{R^{2\sigma}} \int_{|x|<R} |f_1(x) - f_2(x)|^2 dx = 0.$$

定義 2.2 (Fourier 制限作用素)**.** $\kappa \in \mathbb{R}$, $f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ に対して, 球面 $\mathbb{S}^{n-1}$ 上の関数 $\mathcal{F}_\kappa f$ を以下で定める.

$$\mathcal{F}_\kappa f(b) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\kappa\langle x,b\rangle} f(x) dx.$$

補題 2.3 (一様 Fourier 制限評価)**.** $\kappa \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ に対して, $\mathcal{F}_\kappa$ は $B_{1/2}(\mathbb{R}^n)$ から $L^2(\mathbb{S}^{n-1})$ への連続線形作用素に一意的に拡張される. さらに, ある正定数 C が存在し, 任意の $\kappa \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ に対して以下が成り立つ.

$$\|\mathcal{F}_\kappa f\|_{L^2(\mathbb{S}^{n-1})} \leqslant C|\kappa|^{-(n-1)/2} \|f\|_{B_{1/2}(\mathbb{R}^n)}, \quad f \in B_{1/2}(\mathbb{R}^n).$$

$d\sigma$ をユークリッド空間 $\mathbb{R}^n$ 上の Lebesgue 測度から誘導される $\mathbb{S}^{n-1}$ 上の測度とする. また, 全測度が 1 となるよう $d\sigma$ を正規化し, それを db とおく. $\mathbb{S}^{n-1}$ 上の関数 F に対して, ユークリッド空間上の Poisson 変換 P_κ を以下で定義する.

$$P_\kappa F(x) = \int_{\mathbb{S}^{n-1}} e^{i\kappa\langle x,b\rangle} F(b) db.$$

簡単な計算により, $\kappa \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ に対して $\mathcal{F}^*_\kappa = P_\kappa$ が成り立ち, 以下が得られる.

補題 2.4. $\kappa \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ に対して, P_κ は $L^2(\mathbb{S}^{n-1})$ から $B^*_{1/2}(\mathbb{R}^n)$ への連続線形作用素である. さらに, ある正定数 C が存在し, 任意の $\kappa \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ に対して以下が成り立つ.

$$\|P_\kappa F\|_{B^*_{1/2}(\mathbb{R}^n)} \leqslant C|\kappa|^{-(n-1)/2} \|F\|_{L^2(\mathbb{S}^{n-1})}, \quad F \in L^2(\mathbb{S}^{n-1}).$$

[1)] $f \simeq 0$ とは, 上記の平均 L^2-ノルムの意味で, 無限遠において 0 となることを意味する.

$\kappa \in \mathbb{R}$ に対して, $\mathbb{R}^n$ 上の初等球関数 $\psi_\lambda(x)$ は以下で与えられる.

$$\psi_\kappa(x) = \int_{\mathbb{S}^{n-1}} e^{i\kappa\langle x,b\rangle} db = P_\kappa 1(x).$$

$J_\alpha(z)$ を α 次第一種 Bessel 関数とする. また, $\omega_n = \mathrm{vol}(\mathbb{S}^{n-1})$ とする. このとき, 極座標表示 $x = rb$ ($r > 0$, $b \in \mathbb{S}^{n-1}$) のもとで, 初等球関数 $\psi_\kappa(x)$ は以下のように表される.

$$\psi_\kappa(rb) = \omega_n^{-1}(2\pi)^{n/2}(\kappa r)^{-\frac{n}{2}+1} J_{\frac{n}{2}-1}(rb).$$

Bessel 関数の無限遠での漸近挙動を用いることで, 以下の補題が得られる.

補題 2.5 (ψ_κ に対する散乱公式)**.** $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ とする.
$C_0(\kappa) = \omega_n^{-1}(i\kappa/2\pi)^{-(n-1)/2}$ とおく. このとき, 以下が成り立つ.

$$\psi_\kappa(x) \simeq |x|^{-(n-1)/2}\left\{e^{+i\kappa|x|}C_0(+\kappa) + e^{-i\kappa|x|}C_0(-\kappa)\right\} \quad \text{in } B^*_{1/2}(\mathbb{R}^n).$$

補題 2.5 の散乱公式は, 初等級関数 $\psi_\kappa(x)$ は無限遠において, 運動量 k を持つ内向きの球面波 $e^{-i\kappa|x|}$ と外向きの球面波 $e^{+i\kappa|x|}$ で近似できることを示している.

以下では, ユークリッド空間上の平行移動による作用が初等球関数と球面波にどの様な影響を与えるかを振り返る. $x_0 \in \mathbb{R}^n$ を固定し, $F_{\kappa,x_0}(b) = e^{-i\kappa\langle x_0,b\rangle}$ とおく. このとき, 以下が成り立つ.

$$P_\kappa[F_{\kappa,x_0}](x) = \int_{\mathbb{S}^{n-1}} e^{i\kappa\langle x,b\rangle} e^{-i\kappa\langle x_0,b\rangle} db = \psi_\kappa(x - x_0)$$

そして, 平面波で表される $\mathbb{S}^{n-1}$ 上の関数 $F_{\kappa,x_0}(b)$ で生成される部分空間に対して以下が成り立つ.

定義 2.6. $\kappa \in \mathbb{R}$ に対して, $L^2(\mathbb{S}^{n-1})$ の部分空間 $L_\kappa(\mathbb{S}^{n-1})$ を以下で定義する.

$$L_\kappa(\mathbb{S}^{n-1}) = \left\{\sum_{j=1}^{r} c_j e^{-i\kappa\langle x_j,b\rangle}; r \in \mathbb{N}, c_j \in \mathbb{C}, x_j \in \mathbb{R}^n\right\}.$$

補題 2.7 (稠密性)**.** $\kappa \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ に対して $L_\kappa(\mathbb{S}^{n-1})$ は $L^2(\mathbb{S}^{n-1})$ で稠密.

ユークリッド空間における球面波 $e^{\pm i\kappa|x|}$ への平行移動の作用に関して, 以下のような漸近評価が成り立つことが良く知られている.

$$e^{\pm i\kappa|x-x_0|} = e^{\pm i\kappa|x|}e^{\mp i\kappa\langle x_0,b_x\rangle} + O(|x|^{-1}) \qquad (|x| \to \infty).$$

このとき, 補題 2.4, 補題 2.5, 補題 2.7 を組み合わせることで, $\kappa \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ に対して以下の結果が得られる. つまり, 初等球関数に対する散乱公式に対して, 平行移動と極限操作を組み合わせることで, 一般の場合の散乱公式が得られる.

定理 2.8 (cf. Agmon-Hörmander [2] [2)])**.** $\kappa \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ とする．このとき，Poisson 変換 P_κ は $L^2(\mathbb{S}^{n-1})$ から $\mathcal{E}^2_\kappa(\mathbb{R}^n)$ への位相同型を与える．さらに，$f = P_\kappa F$ $(F \in L^2(\mathbb{S}^{n-1}))$ に対して，以下の散乱公式が成り立つ．

$$f(x) \simeq |x|^{-(n-1)/2} \sum_{w \in \{\pm 1\}} e^{iw\kappa|x|} C_0(w\kappa) F(wb_x) \quad \text{in } B^*_{1/2}(\mathbb{R}^n).$$

上記の定理中の (幾何学的) 散乱公式は，ユークリッド空間は平坦であり，ポテンシャルによる摂動を考えていないため，無限遠から入射した粒子がそのまま反対方向に抜けていくという直感的な理解を数学的に表すものである．

また，この定理の系として Rellich の定理が得られ，$\kappa \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ に対して，$\mathcal{E}^2_\kappa(\mathbb{R}^n)$ が非自明な極小の解空間となることが従う．関数空間 $B^*_{1/2}(\mathbb{R}^n)$ は人為的な関数空間の様に見えるかもしれないが，Rellich の定理から $B^*_{1/2}(\mathbb{R}^n)$ は散乱理論において自然な対象であることが分かる．

一方，$\kappa = 0$，すなわち連続スペクトルの閾値に対応する場合には，ノルム $\|\cdot\|_{*,1/2}$ による一般化固有空間の特徴付けは ($n \geqslant 2$ のときは) 成り立たない．$\kappa = 0$ の場合には，ノルムの指数を $1/2$ から $n/2$ に変えた関数空間

$$\mathcal{E}^2_0(\mathbb{R}^n) := \left\{ f \in \mathcal{E}_\kappa(\mathbb{R}^n); \|f\|_{*,n/2} < \infty \right\}$$

が境界 $\mathbb{S}^{n-1}$ 上の L^2-関数に対する極小な固有空間となる．つまり，スペクトル (あるいはエネルギー) が 0 に退化することで，一般化固有関数の無限遠での増大度が変化する．ただし，この場合には $\mathcal{E}^2_0(\mathbb{R}^n)$ は定数関数のみから成り，Poisson 変換 P_0 は $L^2(B)$ から $\mathcal{E}^2_0(\mathbb{R}^n)$ への全射連続写像となるが，非自明な核をもつ．

3　非コンパクト型対称空間上の調和解析

ユークリッド空間では，反転，回転と平行移動を組み合わせた変換が等長変換として推移的に作用する．その一方で曲がった空間では，等長変換としてユークリッド空間とは異なる変換が現れる．例えば，複素平面における単位開円板を $D_1 = \{z \in \mathbb{C}; |z| < 1\}$ とする．D_1 上で $g_P = 4(1-|z|^2)^{-2}|dz|^2$ というリーマン計量を考えて，ユークリッド距離とは異なる距離を D_1 上で考えることが出来る．この計量 (あるいは距離関数) はユークリッド幾何学とは異なる幾何学 (双曲幾何学と呼ばれる) を D_1 上に誘導し，(D_1, g_P) は双曲平面のポアンカレディス

[2)] 論文 [2] ではより一般の微分作用素が扱われており，証明の方法も上記のものとは異なる．

クモデルと呼ばれている．ここで, 以下のような行列から成る集合 $SU(1,1)$ を考える．

$$SU(1,1)=\left\{g=\begin{pmatrix} a & b \\ \overline{b} & \overline{a} \end{pmatrix}; a,b\in\mathbb{C}, |a|^2-|b|^2=1\right\}.$$

そして, 複素数 z に対して $g\cdot z$ を以下の一次分数変換で定義する．

$$g\cdot z=\frac{az+b}{\overline{b}z+\overline{a}}.$$

このとき, この一次分数変換は D_1 の各点を D_1 に移し, さらに g_P から定まる距離を不変にする, すなわちポアンカレ計量に対する等長変換になっている．また, $SU(1,1)$ は単なる集合ではなく, 行列の積と逆行列を取る演算について閉じており, 群と呼ばれる構造 (さらにはリー群の構造) を持つ．そして, D_1 はリー群の組による商空間 $SU(1,1)/SO(2)$ と自然に同一視される．非コンパクト型対称空間 X とは, 上記の例で見たようにある条件を満たすリー群の組 (G,K) による商空間 G/K で, G が等長変換として作用するような計量が付随した負に曲がった空間である．非コンパクト型対称空間 X 上では, リー群の構造に基づいた幾何解析や調和解析が盛んに研究されている．代表的な参考書としては, 非常に大部であるが Helgason による 3 冊 [7], [8], [9] が挙げられる．

以下では, 対称空間上の調和解析に関連する記号を導入する (記号の用法は基本的に [9] に従う)．$X=G/K$ を非コンパクト型対称空間とする．dx を X 上の左-G-不変測度とする．$o=eK$ を X の原点とする．$G=KAN$ をリー群 G の Iwasawa 分解とし, $\mathfrak{g}=\mathrm{Lie}(G)$, $\mathfrak{a}=\mathrm{Lie}(A)$ とする．$l=\dim\mathfrak{a}$ を X のランクとする．$\Sigma\subset\mathfrak{a}^*$ をリー環 $\mathfrak{g}$ の $\mathfrak{a}$ に関する制限ルート系とする．Σ^+ を正の制限ルートから成る集合とし, $\Sigma_0^+=\{\alpha\in\Sigma^+;\alpha/2\notin\Sigma^+\}$ とおく．Π を正の単純ルートから成る集合とする．$\alpha\in\Sigma$ に対して, その重複度を m_α とおく．また, $\rho=\sum_{\alpha\in\Sigma^+}m_\alpha\alpha/2$ とおく．$\mathfrak{a}^*_{\mathrm{reg}}$ を制限ルート系に対する $\mathfrak{a}^*$ の正則点全体から成る集合とする．$\mathfrak{a}^*_{\mathrm{sing}}=\mathfrak{a}^*\setminus\mathfrak{a}^*_{\mathrm{reg}}$ とおく．M を A の K における中心化群とする．$B=K/M$ とおき, B 上の正規化された K-不変測度を db とする．そして, $X_{\mathrm{reg}}\ni x\mapsto(A^+(x),b_x)\in\mathfrak{a}^+\times B$ を一般化極座標とする．W を Weyl 群とする．Iwasawa 分解により $g\in G$ に対して, $g\in K\exp(H(g))N$ となる $H(g)\in\mathfrak{a}$ が一意的に定まる．$(x,b)=(g\cdot o,kM)\in X\times B$ に対して, $A(x,b)=-H(g^{-1}k)$ と定義する．dH (resp. $d\lambda$) を $\mathfrak{a}$ (resp. $\mathfrak{a}^*$) 上の Lebesgue 測度に $(2\pi)^{-l/2}$ を乗じた測度とする．また, dn を N 上の (ある種の正規化をした)Haar 測度とする．$\boldsymbol{c}(\lambda)$ を Harish-Chandra $\boldsymbol{c}$-関数とする．

定義 3.1 (Radon 変換)**.** $f \in C_0^\infty(X)$ に対して, Radon 変換 $\mathcal{R}$ を以下で定義する.

$$Rf(H,b) = e^{\rho(H)} \int_N f(ke^H n \cdot o) dn, \quad (H,b) = (H,kM) \in \mathfrak{a} \times B.$$

定義 3.2 (Helgason-Fourier 変換)**.** $f \in C_0^\infty(X)$ に対して, Helgason-Fourier 変換 $\mathcal{F}$ を以下で定義する.

$$\mathcal{F}f(\lambda,b) = \int_X e^{(-i\lambda+\rho)(A(x,b))} f(x) dx, \quad (\lambda,b) \in \mathfrak{a}^* \times B.$$

定理 3.3 (Fourier slice theorem)**.** $f \in C_0^\infty(X)$ に対して, 以下の等式が成り立つ.

$$\mathcal{F}f(\lambda,b) = \mathcal{F}_{\mathfrak{a}}[\mathcal{R}f(\,\cdot\,,b)](\lambda).$$

ただし, $\mathcal{F}_{\mathfrak{a}}$ はユークリッド空間 $\mathfrak{a}$ 上の標準的な Fourier 変換である.

定義 3.4 (Plancherel 定理)**.** Helgason-Fourier 変換 $\mathcal{F}$ は以下のユニタリ同型に一意的に拡張される.

$$\mathcal{F} : L^2(X) \to L^2_W(\mathfrak{a}^* \times B, |W|^{-1}|\boldsymbol{c}(\lambda)|^{-2} d\lambda db).$$

ただし, $L^2_W(\mathfrak{a}^* \times B, |W|^{-1}|\boldsymbol{c}(\lambda)|^{-2} d\lambda db)$ は以下のように定義される Hilbert 空間である.

$$\begin{aligned} &\psi \in L^2_W(\mathfrak{a}^* \times B, |W|^{-1}|\boldsymbol{c}(\lambda)|^{-2} d\lambda db) \\ :\Longleftrightarrow\ &\text{(i)}\ \psi \in L^2(\mathfrak{a}^* \times B, |W|^{-1}|\boldsymbol{c}(\lambda)|^{-2} d\lambda db). \\ &\text{(ii)}\ \int_B e^{(iw\lambda+\rho)(A(x,b))} \psi(w\lambda,b) db = \int_B e^{(i\lambda+\rho)(A(x,b))} \psi(\lambda,b) db, \\ &\qquad w \in W,\ \text{a.e.}\ (x,\lambda) \in X \times \mathfrak{a}^*. \end{aligned}$$

定義 3.5 (Fourier 制限作用素)**.** $\lambda \in \mathfrak{a}^*_{\mathbb{C}}$ に対して, $C_0^\infty(X)$ を定義域, $L^2(B)$ を値域とする Fourier 制限作用素 $\mathcal{F}_\lambda$ を以下で定める.

$$\mathcal{F}_\lambda f(b) = \int_X e^{(-i\lambda+\rho)(A(x,b))} f(x) dx, \quad f \in C_0^\infty(X).$$

定義 3.6 (Poisson 変換)**.** $\lambda \in \mathfrak{a}^*_{\mathbb{C}}$, $F \in L^1(B)$ に対して, F の Poisson 変換 $\mathcal{P}_\lambda F$ を以下で定義する.

$$\mathcal{P}_\lambda F(x) = \int_B e^{(i\lambda+\rho)(A(x,b))} F(b) db.$$

このとき, $\lambda \in \mathfrak{a}^*$, $f \in C_0^\infty(X)$, $F \in L^2(B)$ に対し, 以下が成り立つことに注意する.

$$\int_X \mathcal{P}_\lambda F(x)\overline{f(x)}dx = \int_B F(b)\overline{\mathcal{F}_\lambda f(b)}db.$$

定義 3.7 (初等球関数)**.** $\lambda \in \mathfrak{a}_{\mathbb{C}}^*$ に対して X 上の初等球関数 $\varphi_\lambda(x)$ が以下で定義される:

$$\varphi_\lambda(x) = \int_B e^{(i\lambda+\rho)(A(x,b))}db.$$

$\boldsymbol{D}(X)$ を対称空間 X 上の G-不変微分作用素の成す代数とする. また, $\boldsymbol{D}_W(A)$ をリー群 A 上の W-不変な A-不変微分作用素の成す代数とする.
$\Gamma : \boldsymbol{D}(X) \to \boldsymbol{D}_W(A)$ を Harish-Chandra 同型とし, $D \in \boldsymbol{D}(X)$ に対応する A 上の微分作用素 $\Gamma(D)$ の表象を $\Gamma(D)(i\lambda)$ とおく. $\lambda \in \mathfrak{a}_{\mathbb{C}}^*$ に対して, 同時固有関数の成すベクトル空間 $\mathcal{E}_\lambda(X)$ を以下で定義する.

$$\mathcal{E}_\lambda(X) = \{f \in C^\infty(X); Df = \Gamma(D)(i\lambda)f \quad \text{for all } D \in \boldsymbol{D}(X)\}.$$

ここで, $\mathcal{E}_\lambda(X)$ は $C^\infty(X)$ 上の標準的な Fréchet 位相に関して, $C^\infty(X)$ の閉部分空間となり, Fréchet 空間となる. そして, 定義の仕方からリー群 G が自然に平行移動として $\mathcal{E}_\lambda(X)$ 上に作用し, 表現が定まる. 表現論の中で重要な研究課題として, 表現の規約性の判定が挙げられるが, 本稿では規約性には詳しく触れない. 例えば, Helgason による参考書 [9] 等を参照のこと.

最後に対称空間上の Poisson 変換に対する散乱公式を述べる際に必要となるユニタリ作用素を導入する. $\lambda \in \mathfrak{a}^*$ に対して, G のユニタリ表現 $(\tau_\lambda, L^2(B))$ を以下で定義する.

$$(\tau_\lambda(g)F)(b) = e^{(-i\lambda+\rho)(A(g\cdot o,b))}F(g^{-1}\cdot b), \quad F \in L^2(B).$$

このとき, 各 $\lambda \in \mathfrak{a}^*$ に対して, ユニタリ表現 τ_λ は規約かつ $\tau_{w\lambda}$ $(w \in W)$ と同値となることが知られている (例えば [9] を参照). そして, Schur の補題により以下の絡作用素 $U_{\lambda,w}$ の存在が導かれることが知られている.

補題 3.8. $w \in W$, $\lambda \in \mathfrak{a}^*$ に対して, $(\tau_\lambda, L^2(B))$ から $(\tau_{w\lambda}, L^2(B))$ へのユニタリ同型な絡作用素 $U_{w,\lambda}$ で以下の性質を満たすものが一意的に存在する.

$$U_{w,\lambda}[e^{(-i\lambda+\rho)(A(g\cdot o,\,\cdot\,))}](b) = e^{(-iw\lambda+\rho)(A(g\cdot o,b))}, \quad g \in G.$$

4　同時固有関数の特徴付けに関する代表的な先行研究

非コンパクト型対称空間 $X = G/K$ の境界 $B = K/M$ 上の L^2-関数に対する Poisson 変換の像の特徴付けについて考察する．非コンパクト型対称空間上の不変微分作用素に対する同時固有関数の特徴付けに関して, これまで様々な結果が得られている．Helgason [6] は, 非コンパクト型対称空間上の任意の同時固有関数は, 境界 B 上の解析的汎関数の Poisson 変換による像として特徴付けられることを予想した (Helgason 予想 (あるいは Helgason-岡本予想) と呼ばれる)．この予想は Kashiwara et al. [14] により肯定的に解決された．その後, 境界 B 上の様々な関数空間 (例えば $\mathcal{D}'(B)$, $C^\infty(B)$, $L^p(B)$ 等) の Poisson 変換による像の特徴付けが研究されている (cf. [3], [4], [5], [11], [15], [16], [17], [19], [23]).

初めに, 対称空間上の Poisson 変換に対する Helgason 予想について振り返る.

予想 4.1 (Helgason 予想 (cf. [6]))**.** 以下の条件 (4.1) を満たす任意の $\lambda \in \mathfrak{a}_{\mathbb{C}}^*$ に対して, Poisson 変換 $\mathcal{P}_\lambda$ は B 上の解析的汎関数全体から成る位相ベクトル空間 $\mathcal{A}'(B)$ から $\mathcal{E}_\lambda(X)$ への位相同型を与える.

$$-2\langle i\lambda, \alpha\rangle/\langle \alpha, \alpha\rangle \notin \mathbb{N}, \quad \alpha \in \Sigma^+. \tag{4.1}$$

その後, Helgason 予想は Kashiwara et al. [14] によって肯定的に解決された.
そして, 次の研究段階として以下のような問題が自然に導かれる.

問題 4.2. 条件 (4.1) をみたす $\lambda \in \mathfrak{a}_{\mathbb{C}}^*$ に対して, 適当な位相ベクトル空間 $\mathcal{V}_B(\subset \mathcal{A}'(B))$ と $\mathcal{V}_X(\subset \mathcal{E}_\lambda(X))$ を選ぶことで, 位相同型

$$\mathcal{P}_\lambda : \mathcal{V}_B \to \mathcal{V}_X$$

を構成せよ．(例えば, $\mathcal{V}_B = \mathcal{D}'(B)$, $C^\infty(B)$, $L^p(B)$ 等.)

始めに, $\mathcal{V}(B) = \mathcal{D}'(B)$ の結果を振り返る．$\mathcal{E}(X)$ の部分空間 $\mathcal{E}^*(X)$ を以下で定義する.

$$\mathcal{E}^*(X) = \left\{ f \in \mathcal{E}(X); \exists A > 0 \text{ s.t. } f(x) = O(e^{Ar(x)}) \right\}.$$

また, $\lambda \in \mathfrak{a}_{\mathbb{C}}^*$ に対して, 以下のように同時固有関数から成る空間 $\mathcal{E}_\lambda^*(X)$ を導入する．(位相の詳細は割愛する.)

$$\mathcal{E}_\lambda^*(X) = \mathcal{E}^*(X) \cap \mathcal{E}_\lambda(X).$$

定理 4.3 (Lewis [17] (rank one), Oshima and Sekiguchi [19] (general))**.** $\lambda \in \mathfrak{a}_{\mathbb{C}}^*$ が (4.1) を満たすとき, 以下の位相同型を得る.

$$\mathcal{P}_\lambda : \mathcal{D}'(B) \to \mathcal{E}_\lambda^*(X).$$

注意 4.4. Lewis [17] は, ランク 1 の場合に, λ が $\langle i\lambda, \alpha\rangle/\langle \alpha, \alpha\rangle \notin \mathbb{Z}$ かつ simple という仮定の下で Poisson 変換に対する同型を得ている. また, Lewis [17] はランクが一般の場合に包含関係 $\mathcal{P}_\lambda(\mathcal{D}'(B)) \subset \mathcal{E}_\lambda^*(X)$ を得ている.

次に, $\mathcal{V}(B) = C^\infty(B)$ の結果を振り返る. $\boldsymbol{D}(G)$ を G 上の左-G-不変な微分作用素全体から成る代数とする. また, $\boldsymbol{E}(X)$ を X 上の微分作用素全体から成る代数とする. このとき, 関数への G-作用 $f(x) \mapsto f(g^{-1} \cdot x)$ は自然な準同型写像 $\nu : \boldsymbol{D}(G) \to \boldsymbol{E}(X)$ を誘導する. $\lambda \in \mathfrak{a}_{\mathbb{C}}^*$ に対して, $\mathcal{E}_\lambda(X)$ の部分空間 $\mathcal{E}_\lambda^\infty(X)$ を以下で定義する. (位相の詳細は割愛する.)

$$\mathcal{E}_\lambda^\infty(X) = \left\{ f \in \mathcal{E}_\lambda(X); \exists A > 0 \text{ s.t. } \forall D \in \boldsymbol{D}(G),\ (\nu(D)f)(x) = O(e^{Ar(x)}) \right\}.$$

定理 4.5 (van den Ban and Schlichtkrull [3])**.** $\lambda \in \mathfrak{a}_{\mathbb{C}}^*$ が (4.1) を満たすとき, 以下の位相同型を得る.

$$\mathcal{P}_\lambda : C^\infty(B) \to \mathcal{E}_\lambda^\infty(X).$$

次に, λ が実かつ正則 (すなわち $\lambda \in \mathfrak{a}_{\mathrm{reg}}^*$) である場合に Poisson 変換 $\mathcal{P}_\lambda$ の L^2-像の特徴づけについて振り返る. Strichartz [24] はスペクトル理論の観点から, 対称空間および等質空間上の不変微分作用素に対する固有関数の特徴付けを考察した. そのなかで, 実かつ正則なスペクトルパラメータ λ に対して, $L^2(B)$ の Poisson 変換 $\mathcal{P}_\lambda$ による像は, Agmon-Hörmander 型のノルムを用いて特徴付けられることを予想した[3].

予想 4.6 (Strichartz 予想 [24, Conjecture 4.5])**.** $\lambda \in \mathfrak{a}_{\mathrm{reg}}^*$, $f \in \mathcal{E}_\lambda(X)$ と仮定する. このとき, ある $F \in L^2(B)$ が存在して $f = \mathcal{P}_\lambda F$ が成り立つ為の必要十分条件は, ある $y \in X$ (あるいは任意の y) に対して

$$\limsup_{R\to\infty} \frac{1}{R^l} \int_{B(y,R)} |f(x)|^2 dx < \infty$$

が成り立つこと, または

$$\sup_{R>0, y\in X} \frac{1}{R^l} \int_{B(y,R)} |f(x)|^2 dx < \infty$$

[3] Strichartz は論文 [24] において他にもいくつかの予想を提示している.

が成り立つことである. さらに

$$\lim_{R\to\infty}\frac{1}{R^l}\int_{B(y,R)}|\mathcal{P}_\lambda F(x)|^2dx=\gamma_l^2|\boldsymbol{c}(\lambda)|^2\,\|F\|_{L^2(B)}^2$$

が成り立ち, λ に依存しない正定数 C が存在して以下が成り立つ.

$$C^{-1}\,\|F\|_{L^2(B)}^2\leqslant|\boldsymbol{c}(\lambda)|^{-2}\sup_{R>0,y\in X}\frac{1}{R^l}\int_{B(y,R)}|\mathcal{P}_\lambda F(x)|^2dx\leqslant C\,\|F\|_{L^2(B)}^2\,. \tag{4.2}$$

対称空間にランク 1 という特別な条件を課した場合には, 超幾何関数や複素 Poisson 核に対する具体性に基いた解析により Boussejra and Sami [5, Theorem A], Ionescu [11, Theorem 1] などで Strichartz 予想が部分的に解決されていたが, 一般の場合は長らく未解決であった. 特に, 不等式 (4.2) の最右辺の評価に関しては, ランク 1 の場合でさえ精密な評価は得られていなかった. Kaizuka [12] では, 定常散乱理論の手法を用いることで, Strichartz 予想に対して肯定的な解答を与えた (第 5 節参照). 定常散乱理論の手法を用いることで, 振動する同時固有関数をスペクトルパラメータに関して一様に評価することが可能となり, 予想の解決につながった. また, Strichartz 予想では λ が実かつ特異な場合は扱われていないが, Kaizuka [13] により, 特異な場合にも退化した特徴づけが得られることが示されている (第 6 節参照).

最後に, λ が (本質的に) 非実である場合の, Poisson 変換の L^p-像の特徴付けを振り返る. $\lambda\in\mathfrak{a}_{\mathbb{C}}^*$ に対して, W の部分群 W_λ, W_λ^R を以下で定義する.

$$W_\lambda=\{w\in W;w\lambda=\lambda\},\quad W_\lambda^R=\{w\in W;w\,\mathrm{Re}(i\lambda)=\mathrm{Re}(i\lambda)\}\,.$$

Poisson 変換の L^p 像の特徴づけを記述するために対称空間 X 上の Hardy 型空間 $\mathcal{H}_\lambda^p(X)$ を導入する. $p\in[1,\infty]$, $\lambda\in\mathfrak{a}_{\mathbb{C}}^*$ に対して, ノルム $\|\cdot\|_{\mathcal{H}_\lambda^p}$ を以下で定義する.

$$\|f\|_{\mathcal{H}_\lambda^p}=\begin{cases}\displaystyle\sup_{x\in X}\varphi_{\mathrm{Re}(i\lambda)}(x)^{-1}\left(\int_K|f(kx)|^pdk\right)^{1/p}, & p\in[1,\infty)\\ \displaystyle\sup_{x\in X}\varphi_{\mathrm{Re}(i\lambda)}(x)^{-1}|f(x)|, & p=\infty\end{cases}$$

そして, Hardy 型空間 $\mathcal{H}_\lambda^p(X)$ を以下のように導入する.

$$\mathcal{H}_\lambda^p(X)=\left\{f\in\mathcal{E}_\lambda(X);\|f\|_{\mathcal{H}_\lambda^p}<\infty\right\}.$$

定理 4.7 (Ben Saïd et al. [4, Theorem 3.6, Corollary 3.7])**.** $\lambda \in \mathfrak{a}_{\mathbb{C}}^*$ が次の仮定を満たすとする.

$$(\mathrm{A1}) \quad \forall \alpha \in \Sigma^+,\ \langle \mathrm{Re}(i\lambda), \alpha \rangle \geqslant 0, \quad (\mathrm{A2}) \quad W_\lambda = W_\lambda^R.$$

このとき, Poisson 変換は以下の等長同型を与える[4)].

(i) $p \in (1, \infty]$ の場合; $\mathcal{P}_\lambda : L^p(B) \to \mathcal{H}_\lambda^p(X)$.

(ii) $p = 1$ の場合; $\mathcal{P}_\lambda : C^*(B) \to \mathcal{H}_\lambda^1(X)$.

5 同時固有関数に対する定常散乱：正則な場合

この節では, スペクトルパラメータ λ が実かつ正則な場合の結果, すなわち Strichartz 予想に対する肯定的な解答を振り返る. $f \in L^2_{\mathrm{loc}}(X)$ に対して, ノルム $\|\cdot\|_*$ を以下で定義する:

$$\|f\|_* = \sup_{R>1} \frac{1}{R^{l/2}} \left(\int_{B(o,R)} |f(x)|^2 dx \right)^{1/2}.$$

ただし, $B(o,R) = \{x \in X; d(x,o) < R\}$. Banach 空間 $(B^*_{l/2}(X), \|\cdot\|_*)$ を $B^*_{l/2}(X) = \{f \in L^2_{\mathrm{loc}}(X); \|f\|_* < \infty\}$ により定義する. 実かつ正則なスペクトルパラメータ $\lambda \in \mathfrak{a}^*_{\mathrm{reg}}$ に対して, $\mathcal{E}_\lambda(X)$ の部分空間 $\mathcal{E}^2_\lambda(X)$ を以下で定義する.

$$\mathcal{E}^2_\lambda(X) = \{f \in \mathcal{E}_\lambda(X); \|f\|_* < \infty\}.$$

このとき, $(\mathcal{E}^2_\lambda(X), \|\cdot\|_*)$ は $B^*_{l/2}(X)$ の閉部分空間であり, Banach 空間となる. さらに, リー群 G による平行移動作用の表現空間となっている.

スペクトルパラメータ λ が実かつ正則な場合に以下の結果が成り立ち, Strichartz 予想に対して肯定的な解決が得られた.

定理 5.1 (Kaizuka [12, Theorem 3.6])**.** $\lambda \in \mathfrak{a}^*_{\mathrm{reg}}$ と仮定する.

(i) λ に依存しない正定数 C が存在し, $F \in L^2(B)$ に対して以下が成り立つ.

$$C^{-1} |\boldsymbol{c}(\lambda)| \, \|F\|_{L^2(B)} \leqslant \|\mathcal{P}_\lambda F\|_* \leqslant C |\boldsymbol{c}(\lambda)| \, \|F\|_{L^2(B)}.$$

さらに, 平均 L^2-ノルムの極限に対して以下が成り立つ.

$$\lim_{R\to\infty} \frac{1}{R^l} \int_{B(o,R)} |\mathcal{P}_\lambda F(x)|^2 dx = \gamma_l^2 |\boldsymbol{c}(\lambda)|^2 \, \|F\|^2_{L^2(B)}.$$

ただし, $\gamma_l = 2^{-l/4} \Gamma(l/2+1)^{-1/2}$.

[4)] [4, Theorem 3.2] では Poisson 変換に対する Fatou 型の定理も得られている.

(ii) Poisson 変換 $\mathcal{P}_\lambda$ は $L^2(B)$ から $\mathcal{E}^2_\lambda(X)$ への位相同型を与える.

(iii) $f \in \mathcal{E}^2_\lambda(X)$ に対して, 逆像 $F = \mathcal{P}_\lambda^{-1} f$ は以下の反転公式で与えられる.

$$F(b) = \lim_{R\to\infty} \gamma_l^{-2} |\boldsymbol{c}(\lambda)|^{-2} \frac{1}{R^l} \mathcal{F}_\lambda[\chi_{B(o,R)} f](b) \quad \text{in } L^2(B).$$

ただし, $\chi_{B(o,R)}(x)$ は $B(o,R)$ の特性関数である.

定義 5.2. $B^*_{l/2}(X)$ において, 同値関係 $\simeq$ を以下で定義する: $f_1, f_2 \in B^*_{l/2}(X)$ に対し,

$$f_1 \simeq f_2 \text{ in } B^*_{l/2}(X) :\Longleftrightarrow \lim_{R\to\infty} \frac{1}{R^l} \int_{B(o,R)} |f_1(x) - f_2(x)|^2 dx = 0.$$

このとき, Poisson 変換に対して以下の散乱公式が成り立つ.

定理 5.3 (Kaizuka [12, Theorem 6.1])**.** $\lambda \in \mathfrak{a}^*_{\mathrm{reg}}$, $F \in L^2(B)$ に対して以下が成り立つ.

$$\mathcal{P}_\lambda F(x) \simeq \sum_{w\in W} e^{(iw\lambda-\rho)(A^+(x))} \boldsymbol{c}(w\lambda)[U_{w,\lambda}F](b_x) \quad \text{in } B^*_{l/2}(X).$$

ただし, $U_{w,\lambda}$ は補題 3.8 において定義された $L^2(B)$ 上のユニタリ作用素である.

先に述べたように, 第 2 節のユークリッド空間上のラプラシアンに対する定常散乱理論の考え方を基に, 主定理が証明される. 対称空間上の Fourier 変換と Poisson 変換に対する調和解析と表現論を用いて, 一様 Fourier 制限評価や散乱公式を証明し, それらを組み合わせることで Strichartz 予想が解決できた. 特に, 散乱公式の証明に関しては, ユークリッド空間の場合と同様に, 第 1 段階として Harish-Chandra 級数展開という漸近展開を用いて, 初等級関数 $\varphi_\lambda(x)$ に対して散乱公式を示す. そして, 第 2 段階として平行移動と極限操作を行うことで一般の L^2-関数 F に対して散乱公式を得るというのが概略である. 大まかな証明の流れ自体はユークリッド空間と似てはいるが, 証明の要所要所でリー群の表現論が本質的に用いられている. そして, 第 2 節で触れた単独のラプラシアンに対する散乱公式では, 固有関数は二つの球面波で近似されていたが, 上記の散乱公式は同時固有関数, すなわち微分方程式系の解に対するものであり, K に関する “球面波” $e^{(iw\lambda)(A^+(x))}$ が Weyl 群の位数 $|W|$ の分だけ現れる点が本質的に異なる.

6　同時固有関数に対する定常散乱：特異な場合

Strichartz 予想では, スペクトルパラメータが実かつ特異な場合は考察されていない. そして, スペクトルパラメータが実かつ正則な場合と, 特異な場合は同

時固有関数の無限遠での挙動が本質的に異なる. スペクトルパラメータが実かつ特異な場合には, その退化次数に応じて波動関数の周波数が合流し, 無限遠方での減衰度が悪くなる. そこで, [13] では, 退化次数に応じた適切な関数空間を導入し, [12] で用いられた一様フーリエ制限評価や散乱公式を特異な場合に拡張することにより, Poisson 変換 $\mathcal{P}_{\lambda_0}$ の L^2-像を特徴付けた.

前節の λ が実かつ正則な場合の結果から, 以下の事が読み取れる: $\lambda_0 \in \mathfrak{a}^*_{\mathrm{sing}}$ とし, $\{\lambda_j\}_{j=1}^{\infty} \subset \mathfrak{a}^*_{\mathrm{reg}}$ が $\lambda_j \to \lambda_0$ $(j \to \infty)$ を満たすとする. このとき, 任意の $w \in W$ に対して $|\boldsymbol{c}(w\lambda_j)| \to \infty$ $(j \to \infty)$. よって, 定理 5.1 (i) より, 非零な $F \in L^2(B)$ に対して $\left\|\mathcal{P}_{\lambda_j} F\right\|_* \to \infty$ $(j \to \infty)$ が成り立つ. また, 定理 5.3 の散乱公式における係数 $\boldsymbol{c}(w\lambda_j)$ もすべて発散する. 実際, 後に述べるように, 非零な $F \in L^2(B)$ に対しては, $\mathcal{P}_{\lambda_0} F \notin B^*_{l/2}(X)$ が成り立ち, 同時固有関数に無限遠での減衰に関して退化が生じる. ユークリッド空間の場合と比較すると, 表 1 の様な対応関係が見て取れる.

表 1: スペクトルの対応

等質空間	$\mathbb{R}^n$	G/K
パラメータ	$\kappa \in \mathbb{R}$	$\lambda \in \mathfrak{a}^*$
不変微分方程式 (系)	$(-\Delta_{\mathbb{R}^n})f = \kappa^2 f$	$Df = \Gamma(D)(i\lambda)f$
対称性	$\mathbb{Z}_2 \curvearrowright \mathbb{R}$	$W \curvearrowright \mathfrak{a}^*$
正則な場合	$\mathbb{R} \setminus \{0\}$	$\mathfrak{a}^*_{\mathrm{reg}}$
特異な場合	$\{0\}$	$\mathfrak{a}^*_{\mathrm{sing}}$

ユークリッド空間上の自由 Schrödinger 作用素に対しては, 一点 0 だけが特異なスペクトルパラメータである. その一方で, 同時固有関数に対するスペクトルの特異集合 $\mathfrak{a}^*_{\mathrm{sing}}$ は, $\mathfrak{a}^*$ 内の原点を通る超平面の有限和で表される. 特異集合 $\mathfrak{a}^*_{\mathrm{sing}}$ は $\boldsymbol{c}$-関数 $\boldsymbol{c}(\lambda)$ の (実の) 特異点集合と一致する. $\lambda_0 \in \mathfrak{a}^*_{\mathrm{sing}}$ に対して, $\boldsymbol{c}$-関数の特異点の位数に応じた関数空間の指数 ν_0 を定めて, Poisson 変換 $\mathcal{P}_{\lambda_0}$ の L^2-像を特徴づける.

主結果を述べるためにいくつか記号を導入する. $\sigma > 0$, $f \in L^2_{\mathrm{loc}}(X)$ に対して, ノルム $\|\cdot\|_{*,\sigma}$ を以下で定義する:

$$\|f\|_{*,\sigma} = \sup_{R>1} \frac{1}{R^\sigma} \left(\int_{B(o,R)} |f(x)|^2 dx \right)^{1/2}.$$

Banach 空間 $(B^*_\sigma(X), \|\cdot\|_{*,\sigma})$ を $B^*_\sigma(X) = \{f \in L^2_{\mathrm{loc}}(X); \|f\|_{*,\sigma} < \infty\}$ により定義する.

定義 6.1. Banach 空間 $(B_\sigma^*(X), \|\cdot\|_{*,\sigma})$ において同値関係 $\simeq$ を以下で定義する:

$$f_1 \simeq f_2 \ \text{ in } B_\sigma^*(X) :\Longleftrightarrow \lim_{R\to\infty} \frac{1}{R^{2\sigma}} \int_{B(o,R)} |f_1(x) - f_2(x)|^2 dx = 0.$$

以下, $\lambda_0 \in \mathfrak{a}_{\mathrm{sing}}^*$ と仮定する. W の λ_0 における固定部分群を W_{λ_0} とする. また, $\Sigma_{\lambda_0}^0 = \{\alpha \in \Sigma_0^+; \langle \alpha, \lambda_0 \rangle = 0\}$ とおく. λ_0 における $\boldsymbol{c}(\lambda)$ の特異性を与える多項式関数 $\boldsymbol{\pi}_0(\lambda)$ と, (λ_0 の近傍で) 滑らかな成分 $\boldsymbol{b}_0(\lambda)$ を以下で定める.

$$\boldsymbol{\pi}_0(\lambda) = \prod_{\alpha \in \Sigma_{\lambda_0}^0} \langle \alpha, \lambda \rangle, \ \ \boldsymbol{b}_0(\lambda) = \boldsymbol{\pi}_0(i\lambda)\boldsymbol{c}(\lambda). \tag{6.1}$$

また, 正定数 γ_0 を以下で定義する.

$$\gamma_0 = \frac{|W_{\lambda_0}|^{1/2}}{\partial(\boldsymbol{\pi}_0)(\boldsymbol{\pi}_0)} \left(\int_{|H|<1} |\boldsymbol{\pi}_0(H)|^2 dH \right)^{1/2}.$$

ただし, $\partial(\boldsymbol{\pi}_0)$ は多項式関数 $\boldsymbol{\pi}_0$ を表象とする $\mathfrak{a}^*$ 上の微分作用素である. さらに, λ_0 に対して指数 $\nu_0 \in \mathbb{N}$ を以下で定義する.

$$\nu_0 = l + 2|\Sigma_{\lambda_0}^0|.$$

この指数 ν_0 に応じたノルム $\|\cdot\|_{*,\nu_0/2}$ を用いて, Poisson 変換の L^2-像を特徴付ける. $\mathcal{E}_{\lambda_0}(X)$ の部分空間 $\mathcal{E}_{\lambda_0}^2(X)$ を以下で定義する.

$$\mathcal{E}_{\lambda_0}^2(X) = \left\{ f \in \mathcal{E}_{\lambda_0}(X); \|f\|_{*,\nu_0/2} < \infty \right\}.$$

このとき, ノルム空間 $(\mathcal{E}_{\lambda_0}^2(X), \|\cdot\|_{*,\nu_0/2})$ は Banach 空間となる. そして, 正則な場合と同様にリー群 G による平行移動が $\mathcal{E}_{\lambda_0}^2(X)$ 上に作用する.

以下がスペクトルパラメータが実かつ特異な場合の主結果である.

定理 6.2 (Kaizuka [13])**.** $\lambda_0 \in \mathfrak{a}_{\mathrm{sing}}^*$ と仮定する.

(i) λ_0 に依存しない正定数 C が存在し, $F \in L^2(B)$ に対して以下が成り立つ.

$$C^{-1}|\boldsymbol{b}_0(\lambda_0)| \, \|F\|_{L^2(B)} \leqslant \|\mathcal{P}_{\lambda_0}F\|_{*,\nu_0/2} \leqslant C|\boldsymbol{b}_0(\lambda_0)| \, \|F\|_{L^2(B)}.$$

さらに, 平均 L^2-ノルムの極限に対して以下が成り立つ.

$$\lim_{R\to\infty} \frac{1}{R^{\nu_0}} \int_{B(o,R)} |\mathcal{P}_{\lambda_0}F(x)|^2 dx = \gamma_0^2 |\boldsymbol{b}_0(\lambda_0)|^2 \, \|F\|_{L^2(B)}^2.$$

(ii) Poisson 変換 $\mathcal{P}_{\lambda_0}$ は $L^2(B)$ から $\mathcal{E}_{\lambda_0}^2(X)$ への位相同型を与える.

(iii) $f \in \mathcal{E}^2_{\lambda_0}(X)$ に対して, 逆像 $F = \mathcal{P}^{-1}_{\lambda_0} f$ は以下の反転公式で与えられる.

$$F(b) = \lim_{R\to\infty} \gamma_0^{-2} |\boldsymbol{b}_0(\lambda_0)|^{-2} \frac{1}{R^{\nu_0}} \mathcal{F}_{\lambda_0}[\chi_{B(o,R)} f](b) \quad \text{in} \ \ L^2(B).$$

一方で, 特異な場合には散乱公式に退化による多項式関数が現れる.

定理 6.3 (Kaizuka [13])**.** $\lambda \in \mathfrak{a}^*_{\mathrm{sing}}$, $F \in L^2(B)$ に対して以下が成り立つ.

$$\mathcal{P}_{\lambda_0} F(x) \simeq \sum_{[w]\in W/W_{\lambda_0}} e^{(iw\lambda_0 - \rho)(A^+(x))} \boldsymbol{a}_0(x, \lambda_0; w)[U_{w,\lambda_0} F](b_x) \quad \text{in} \ \ B^*_{\nu_0/2}(X).$$

例 6.4 (A_2 型の場合)**.** 制限ルート系が A_2 型の場合に, どの様に振幅関数 $\boldsymbol{a}_0(x, \lambda_0; w)$ に退化が起こるかを具体的に記述する.

(1) $\lambda_0 \in \mathfrak{a}^*_{\mathrm{sing}}$ が $\langle \alpha_1, \lambda_0 \rangle = 0$, $\langle \alpha_j, \lambda_0 \rangle \neq 0$ $(j = 2, 3)$ を満たす場合：このとき, $\nu_0 = 2 + 2 \cdot 1 = 4$ であり, $\boldsymbol{a}_0(x, \lambda_0; w)$ は $A^+(x)$ に関する 1 次の多項式関数となる.

(2) $\lambda_0 \in \mathfrak{a}^*_{\mathrm{sing}}$ が $\langle \alpha_j, \lambda_0 \rangle = 0$ $(j = 1, 2, 3)$ を満たす場合, すなわち $\lambda_0 = 0$ 場合: このとき, $\nu_0 = 2 + 2 \cdot 3 = 8$ であり, $\boldsymbol{a}_0(x, \lambda_0; w)$ は $A^+(x)$ に関する 3 次の多項式関数となる.

一般の場合には, 退化次数 ν_0 の値の変化は制限ルート系の構造に応じてより複雑になる.

ここで, 特異な場合の散乱公式と正則な場合との相違点を述べる. 正則な場合には, $\lambda \in \mathfrak{a}^*_{\mathrm{reg}}$ の Weyl 群 W による軌道の個数は $|W|$ と一致する. 一方, 特異な場合には, $\lambda_0 \in \mathfrak{a}^*_{\mathrm{sing}}$ の Weyl 群 W による軌道の個数は $|W|/|W_{\lambda_0}|$ と一致する. よって, 特異な場合の散乱公式は, 正則な場合の波動関数 $\{e^{(iw\lambda)(H)}\}_{w\in W}$ の一部 (あるいは全部) が合流し, 共鳴を起こすことで振幅が大きくなり退化した, と解釈することが出来る.

特異な場合の証明の基本方針は, 実かつ正則な場合と同じで, 一様 Fourier 制限評価と散乱公式を証明することである. ただし, 実かつ正則な場合のそれらの証明では, 至る所の係数に $\boldsymbol{c}(\lambda)$, あるいは $\boldsymbol{c}(\lambda)^{-1}$ が現れる為, 同じ議論により直接証明することはできない. そこで, van den Ban and Schlichtkrull [3] や Narayanan et al. [18] において, スペクトルパラメータが特異な場合の, 初等球関数 (あるいは超幾何関数) の漸近展開を得るために開発された以下のテクニッ

クを導入する: $\lambda_0 \in \mathfrak{a}^*_{\mathrm{sing}}$ と (6.1) で定義した多項式関数 $\boldsymbol{\pi}_0(\lambda)$ に対して, 次の恒等式が成り立つ.

$$\partial(\boldsymbol{\pi}_0)(\boldsymbol{\pi}_0)\varphi_{\lambda_0} = \partial(\boldsymbol{\pi}_0)[\boldsymbol{\pi}_0(\lambda)\varphi_\lambda]\|_{\lambda=\lambda_0}.$$

この恒等式を用いることで, 初等球関数 φ_λ の級数展開 (Harish-Chandra 展開) に現れる, 特異な係数 $\boldsymbol{\pi}_0(i\lambda)^{-1}$ を消し, 無限遠で減衰度が退化した漸近評価が得られる. 一様 Fourier 制限評価についても, 似たアイデアを導入することで λ_0 において消えてしまう多項式関数 $\boldsymbol{\pi}_0(i\lambda)$ を取り除くことが出来る.

7 多時間波動方程式に対する散乱理論

[12] と [13] により, 対称空間上の不変微分作用素に付随する同時固有関数に対する定常散乱に対する基礎理論が完成した. 一方で, Semenov-Tjan-Šanskiĭ [21] は対称空間上の不変微分作用素に対する時間依存する散乱理論 (“波動方程式” に対する散乱理論) を構築している. ここで, ユークリッド空間上の波動方程式の初期値問題は以下の様に表されることを確認しておく.

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t) = \Delta_{\mathbb{R}^n} u(x,t), \\ u(x,0) = f_1(x), \quad \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,0) = f_2(x). \end{cases}$$

Semenov-Tjan-Šanskiĭ [21] は, 対称空間 X 上の不変微分作用素の成す代数 $\boldsymbol{D}(X)$ に対して, 以下のような微分方程式系に対する “初期値問題” を導入し, 散乱理論を構築した.

$$\begin{cases} \partial_H(\Gamma(D))u(x,H) = D_x u(x,H), & D \in \boldsymbol{D}(X), \\ (\partial_H(p_j)u)(x,o) = f_j(x), & 1 \leqslant j \leqslant |W|. \end{cases}$$

ユークリッド空間上の単独の波動方程式と比較すると, この微分方程式系では $H \in \mathfrak{a}(\simeq \mathbb{R}^l)$ が (多次元の) 時間パラメータの役割を果たしており, ラプラシアンに対する単独の波動方程式の拡張となっている (ランク 1 の場合は (修正) 波動方程式と一致する). この微分方程式系は, “multitemporal wave equation” (直訳すると「多時間波動方程式」) と呼ばれている. 多時間波動方程式に対する散乱理論に関連する研究としては, 例えば Helgason [10], Phillips-Shahshahani [20], Shahshahani [22] 等がある. ユークリッド空間上の波動方程式では既知の性質であっても, 多時間波動方程式に関しては未解決の問題がいくつか知られ,

現在でも研究が続いている.

[付記] 本稿は, 著者の RIMS 研究集会「スペクトル・散乱理論とその周辺」(於: 数理解析研究所, 平成 28 年 12 月 7 日〜12 月 9 日) の講究録をもとに, 大幅な改編・修正を加えたものである.

参考文献

[1] 中澤秀夫, 数学的散乱理論について, 日本医科大学基礎科学紀要 **43** (2014), 1–18.

[2] S. Agmon and L. Hörmander, *Asymptotic properties of solutions of differential equations with simple characteristics*, J. Analyse Math. **30** (1976), 1–38.

[3] E. P. van den Ban and H. Schlichtkrull, *Asymptotic expansions and boundary values of eigenfunctions on Riemannian symmetric spaces*, J. Reine Angew. Math. **380** (1987), 108–165.

[4] S. Ben Saïd, T. Oshima, and N. Shimeno, *Fatou's theorems and Hardy-type spaces for eigenfunctions of the invariant differential operators on symmetric spaces*, Int. Math. Res. Not. **16** (2003), 915–931.

[5] A. Boussejra and H. Sami, *Characterization of the L^p-range of the Poisson transform in hyperbolic spaces $B(\mathbb{F}^n)$*, J. Lie Theory **12** (2002), no. 1, 1–14.

[6] S. Helgason, *A duality for symmetric spaces with applications to group representations*, Advances in Math. **5** (1970), 1–154.

[7] ______, "Groups and geometric analysis", Mathematical Surveys and Monographs, vol. 83, American Mathematical Society, Providence, RI, 2000.

[8] ______, "Differential geometry, Lie groups, and symmetric spaces", Graduate Studies in Mathematics, vol. 34, American Mathematical Society, Providence, RI, 2001. Corrected reprint of the 1978 original.

[9] ______, "Geometric analysis on symmetric spaces", 2nd ed., Mathematical Surveys and Monographs, vol. 39, American Mathematical Society, Providence, RI, 2008.

[10] ______, *Integral geometry and multitemporal wave equations*, Comm. Pure Appl. Math. **51** (1998), no. 9-10, 1035–1071. Dedicated to the memory of Fritz John.

[11] A. D. Ionescu, *On the Poisson transform on symmetric spaces of real rank one*, J. Funct. Anal. **174** (2000), no. 2, 513–523.

[12] K. Kaizuka, *A characterization of the L^2-range of the Poisson transform related to Strichartz conjecture on symmetric spaces of noncompact type*, Adv. Math. **303** (2016), 464–501.

[13] ______, *A characterization of the L^2-range of the Poisson transform with real and singular spectral parameter on symmetric spaces of noncompact type*, J. Lie Theory **28** (2018), 581–607 (Published electronically).

[14] M. Kashiwara, A. Kowata, K. Minemura, K. Okamoto, T. Oshima, and M. Tanaka, *Eigenfunctions of invariant differential operators on a symmetric space*, Ann. of Math. (2) **107** (1978), no. 1, 1–39.

[15] P. Kumar, *Fourier restriction theorem and characterization of weak L^2 eigenfunctions of the Laplace-Beltrami operator*, J. Funct. Anal. **266** (2014), no. 9, 5584–5597.

[16] P. Kumar, S. K. Ray, and R. P. Sarkar, *Characterization of almost L^p-eigenfunctions of the Laplace-Beltrami operator*, Trans. Amer. Math. Soc. **366** (2014), no. 6, 3191–3225.

[17] J. B. Lewis, *Eigenfunctions on symmetric spaces with distribution-valued boundary forms*, J. Funct. Anal. **29** (1978), no. 3, 287–307.

[18] E. K. Narayanan, A. Pasquale, and S. Pusti, *Asymptotics of Harish-Chandra expansions, bounded hypergeometric functions associated with root systems, and applications*, Adv. Math. **252** (2014), 227–259.

[19] T. Oshima and J. Sekiguchi, *Eigenspaces of invariant differential operators on an affine symmetric space*, Invent. Math. **57** (1980), no. 1, 1–81.

[20] R. S. Phillips and M. M. Shahshahani, *Scattering theory for symmetric spaces of noncompact type*, Duke Math. J. **72** (1993), 1–29.

[21] M. A. Semenov-Tjan-Šanskiĭ, *Harmonic analysis on Riemannian symmetric spaces of negative curvature and scattering theory*, Math. USSR, Izvestija **10** (1976), 535–563.

[22] M. M. Shahshahani, *Invariant hyperbolic systems on symmetric spaces*, Differential geometry (College Park, Md., 1981/1982), Progr. Math., vol. 32, Birkhäuser, Boston, Mass., 1983, pp. 203–233.

[23] P. Sjögren, *Characterizations of Poisson integrals on symmetric spaces*, Math. Scand. **49** (1981), no. 2, 229–249.

[24] R. S. Strichartz, *Harmonic analysis as spectral theory of Laplacians*, J. Funct. Anal. **87** (1989), no. 1, 51–148.

[25] ———, *Corrigendum to: "Harmonic analysis as spectral theory of Laplacians"*, J. Funct. Anal. **109** (1992), no. 2, 457–460.

（受付日　平成 29 年　9 月 30 日）

（受理日　平成 29 年 11 月 30 日）