〈研究ノート〉

対　数　関　数

儀　我　真理子*

Logarithmic Function

Mariko GIGA

1　イントロダクション

nを整数としてx^nの不定積分を考えるとき、$n=-1$以外では次数が$n+1$になる。ところが$n=-1$の場合だけは対数関数になる。微分、積分を考えるとき、多項式の世界に例外的に対数関数が出てくるのは不思議といえば不思議である。計算すると確かにそうなるし、x^{-1}の積分は$n+1=0$次でないことは明らかなので、他と同様にならないのは当然であるが、そのあたりの状況および対数関数について考えるのが本稿の目的である。

対数関数は、指数関数の逆関数として定義された。指数関数$y=a^x$を微分してみると、ある定数kが存在して

$$\frac{dy}{dx}=ka^x \tag{1.1}$$

となることがわかる。このkを 1 とする数aを求め、eと名付けた。これを使うと指数関数の微分が

$$\frac{d}{dx}e^x=e^x \tag{1.2}$$

となり話が簡単になる。指数関数のことはe^xだけで考えれば基本的な話は済む。

微分しても形が変わらない関数が他にないかを見るために、微分方程式$\dfrac{dy}{dx}=y$を解いてみると、cを定数として、$y=ce^x$の形に限ることがわかる。その逆関数

* 日本医科大学・数学教室　Department of Mathematics, Nippon Medical School

$x = ce^y$ を x で微分すると $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1}{x}$ となる。つまり「微分しても形が変わらない関数の逆関数の微分」は $\dfrac{1}{x}$ に限るわけである。このようにして、関数 $\dfrac{1}{x}$ は指数関数の文脈に自然に現れることがわかる。

次に多項式の微分積分の観点から考察する。

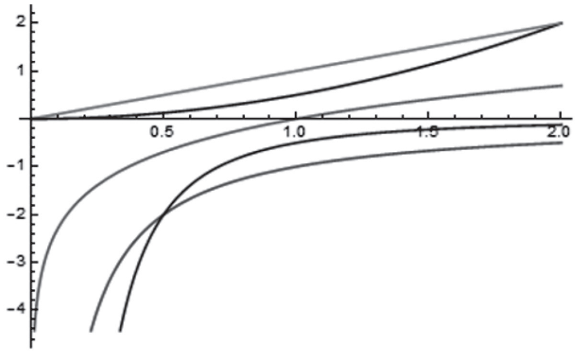
$$\ldots, x^2,\ x,\ 1,\ x^{-1},\ x^{-2},\ x^{-3}, \ldots$$

の積分

$$\ldots, \frac{1}{3}x^3,\ \frac{1}{2}x^2,\ x,\ \log x,\ -x^{-1},\ -\frac{1}{2}x^{-2}, \ldots$$

の $x > 0$ 上のグラフをいくつか描いてみると下の図のようになり、$\log x$ はそれなりに自然な位置を占めている。次数として整数 n を考えると $n = -1$ のときに対数関数が現れるが、次数が非整数である $n + \alpha$（$0 < \alpha < 1$）次の関数 $x^{n+\alpha}$ の微分や不定積分の次数は何事もなかったかのように 1 つずつ増えたり減ったりする。

多項式の積分



グラフは、$x = 1.0$ の点における値の大きいものから、

$$f(x) = x,\ \frac{1}{2}x^2,\ \log x,\ -\frac{1}{2}x^{-2},\ -x^{-1}.$$

2　複素関数として考えると

ここでは、対数関数を複素関数として考えたときどうなるか、および $\dfrac{1}{z}$ との関係を考えてみる。複素関数論は 18 世紀から 19 世紀にかけて、オイラー、ガウス、

リーマン、コーシーらによってその基礎が作られた理論であるが、数学的にはもちろん、物理や工学などの応用においても広く使われている理論である。

代数学の基本定理「nを自然数とするとき、複素数を係数とするn次方程式

$$a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \ldots a_1 z + a_0 = 0$$

は複素数の範囲で解を持つ」から、「n次方程式は、重複度を考えたときちょうどn個の解を持つ」が言える。この美しい定理は数を複素数まで拡張して初めて成り立つことである。またn乗根の概念も複素数の世界では明瞭な形で表現できる。このように複素数の世界はとてもすっきりしており、複素数の世界まで広げて考察することにより関数の本質が見えてくることも多い。このセクションでは、複素関数論の中でイントロダクションに述べたテーマに関連した事柄の概略を抜き出しそれをより細かく見ることにより、本稿のテーマに少しでも迫りたい。このセクションを書くにあたっては、参考文献［1, 2, 3, 4］を参考にした。

複素関数への拡張

複素変数の指数関数を次の式で定義する。

$$z = x + yi \text{ のとき、} e^z = e^x(\cos y + i \sin y)$$

オイラーの公式により

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$$

であるから、複素数zは、

$$z = re^{i\theta}$$

と簡潔に表現できる。

複素変数の対数関数は、$z=0$ を除いたところで次の式で定義される。

$$w = \log z \text{ は } z = e^w \text{ を満たすものとする。}$$

複素変数のべき関数は、$z=0$ を除いたところで次の式で定義される。

$$z^\alpha = e^{\alpha \log z} \ (\alpha：\text{複素数})$$

正則関数

複素関数が正則であるとは、複素関数の意味で微分可能なことであり、実数における微分を複素数に置き換えるだけの形で定義されている。しかしこの自然な形で定義された“正則”の概念は実はかなり強い条件である。正則関数の実部と虚部は、コーシー・リーマンの関係式を満たすことから調和関数でなければならず、その一方が決まると他方は定数だけの自由度をもって決まってしまう。上に述べた関数はすべて正則関数である。

一致の定理

実関数を複素平面上の関数、複素関数に拡張する仕方は他にもある。しかし次に述べる一致の定理により、複素関数の理論はその拡張の仕方によらないことが保証される。

一致の定理：$f(z)$，$g(z)$は領域Dで正則であるとする。ある点の近傍またはある線分上で2つの関数の値が等しければ、D全体で等しい（この仮定は弱めることができ、D内に集積点を持つ点集合で2つの関数の値が等しければよい)。

多価性とリーマン面

ひとつの数zについても、一般には$z=re^{i(\theta+2n\pi)}$（nは整数）と表せるから、対数関数は

$$\log z = \log r + i(\theta + 2n\pi)$$

となる。$re^{i\theta}$と$re^{i(\theta+2\pi)}$は、表記は異なるが複素平面上で同じ数である。しかし$\log r + i\theta$と$\log r + i(\theta + 2\pi)$は異なる数である。それゆえ、$\log z$はひとつの$z$について無限個の値をとる、つまり多価関数である。対数関数で、値域を$-\pi < \mathrm{Im}(\log z) \leq \pi$に制限したものの値を**主値**といい、$\mathrm{Log}\, z$で表す。

多価関数を1価関数にするのに、主値をとるのも1つの方法であるが、値域の方で別の値をとるものは定義域でも別のものとして考えてしまおうという方法もある。リーマン面の考え方である。そのつながり方をよく見ると、リーマン面はただ多価性を何枚もの面で表現しただけでなく、螺旋階段のように値が一続きにつながっていることがわかる。

次にべき関数について考える。

$$z^\alpha = e^{\alpha \log z} = e^{\alpha(\log r + i(\theta + 2n\pi))}$$

であるから、対数関数の多価性からべき関数も一般には多価関数となる。べき関数の多価性は$\alpha \times 2n\pi i$の部分に起因する。αが整数の場合は、ある整数sが存在して$\alpha \times 2n\pi i = 2s\pi i$となり、$e^{2s\pi i} = 1$であるから、1価関数となり、$\alpha$が整数以外の有理数$\dfrac{l}{k}$（既約分数、$k > 0$）の場合は、$k$価関数となり、$\alpha$が無理数の場合は無限多価となる。これらについても、接続部分では値が一続きにつながっているという意味で、リーマン面の考え方ができることがわかる。

$\mathrm{Log}\, z$の微分

次に対数関数$\mathrm{Log}\, z = \log r + i\theta$の微分を考えてみる。極座標$x = r\cos\theta$，$y = r\sin\theta$を使うと、

$$\frac{\partial}{\partial x} = \cos\theta \frac{\partial}{\partial r} - \frac{\sin\theta}{r}\frac{\partial}{\partial \theta}, \quad \frac{\partial}{\partial y} = \sin\theta \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\cos\theta}{r}\frac{\partial}{\partial \theta}$$

となる。一般に$f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$に対して

$$\frac{df}{dz} = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x}\left(= -i\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial y}\right)$$

であるから、$\mathrm{Log}\, z = \log r + i\theta$については、

$$\begin{aligned}\frac{d\,\mathrm{Log}\, z}{dz} &= \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} = \cos\theta\frac{\partial \log r}{dr} - i\frac{\sin\theta}{r} \\ &= \frac{1}{r}(\cos\theta - i\sin\theta) = \frac{1}{r(\cos\theta + i\sin\theta)} = \frac{1}{z}\end{aligned}$$

を得る。

$\dfrac{1}{z}$と対数関数

$\dfrac{1}{z}$の原始関数が$\mathrm{Log}\, z$であることはわかった。次に$\dfrac{1}{z}$と$\log z$の関係を積分の観点から考察する。そのためには積分の経路を指定しなくてはならない。下記(2.3)は、解析接続の理論を用いれば簡単な計算で導くこともできるが、積分計算の内部を見るために直接計算する。

$z = 1$から$z = re^{i\theta}$への原点を通らない曲線Cとする。点1から点rへ向かう実軸上の線分をΓ_1、点rから点$re^{i\theta}$へ向かう円弧をΓ_2とする。ただし、閉曲線$-C + \Gamma_1 + \Gamma_2$が0を内部に含むようにとる。このとき、

$$\begin{aligned}\int_{\Gamma_1+\Gamma_2}\frac{1}{z}dz &= \int_{\Gamma_1}\frac{1}{z}dz+\int_{\Gamma_2}\frac{1}{z}dz\\ &= \int_1^r \frac{1}{x}dx+\int_0^\theta \frac{1}{re^{it}}\frac{d(re^{it})}{dt}dt\\ &= \log r + i\theta \end{aligned} \tag{2.1}$$

となり、また0のまわりの回転数を$-n$（nは整数）とすると、後述（2.8）からわかるように、

$$-\int_C \frac{1}{z}dz+\int_{\Gamma_1}\frac{1}{z}dz+\int_{\Gamma_2}\frac{1}{z}dz=-2n\pi i$$

であるから、

$$\int_C \frac{1}{z}dz=\log r+i(\theta+2n\pi) \tag{2.2}$$

となる。右辺は$\log re^{i\theta}$の一つの値であるから、

$$\int_1^z \frac{1}{w}dw=\log z \tag{2.3}$$

を得る。この両辺はいずれも無限多価関数であり、全体として一致する。

例１　Cを点aを中心し半径rの円、すなわち$C=\{z||z-a|=r\}$とするとき、整数mに対して次が成り立つ。例としたが、重要な結果である。

$$\int_C (z-a)^m dz=\begin{cases}2\pi i & (m=-1\text{ のとき})\\ 0 & (m\text{ が }-1\text{ 以外の整数のとき}).\end{cases} \tag{2.4}$$

（証明）

$m>0$の場合は、z^mは正則関数であるから明らかである。$m<0$の場合、$z=a+re^{i\theta}$とおくと、

$$\begin{aligned}\int_C (z-a)^m dz &= \int_0^{2\pi} r^m e^{im\theta} rie^{i\theta}d\theta\\ &= ir^{m+1}\int_0^{2\pi} e^{(m+1)i\theta}d\theta\end{aligned} \tag{2.5}$$

となり、$m=-1$のときはこの右辺は$2\pi i$である。$m\neq -1$のときは、

$$\int_0^{2\pi} e^{(m+1)i\theta}d\theta=\int_0^{2\pi}\frac{1}{i(m+1)}\frac{d}{d\theta}(e^{(m+1)i\theta})d\theta=0 \tag{2.6}$$

となる。　（証明終り）

(2.5) 式の右辺を計算したものには r は出てこない。これは Cauchy の積分定理より当然のことである。つまり積分路 C は、a を内部にもつ閉曲線であればよく円である必要はない。例 1 の証明において、$m<0$ のときは、被積分関数はこの積分路において正則関数ではない。それゆえ原始関数を使って積分を計算することはできず、(2.5)、(2.6) のようにすることになる。(2.6) をよく見ることにより次のことがわかる。

$\{z||z-a|=r\}$ を n 回（n は整数）まわる積分路を nC とする。m が、整数ではなく有理数 $\frac{l}{k}$（既約分数、$k>0$）のときは、

$$\int_{kC}(z-a)^m dz = 0. \tag{2.7}$$

すなわち、k 回まわったときに初めて 0 になる。$m=-1$ のときは、

$$\int_{kC}(z-a)^m dz = 2k\pi i. \tag{2.8}$$

また m が無理数のときは、いかなる整数 k についての kC 上で積分してもこの積分の値が 0 になることはない。

ローラン展開と留数

$f(z)$ が 1 点 a で正則でないとき、a は特異点であるという。a が特異点のとき、$f(z)$ は a を中心として次のようにローラン展開される。

$$f(z) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{b_{-m}}{(z-a)^m} + \sum_{m=0}^{\infty} b_m (z-a)^m.$$

$\dfrac{1}{z-a}$ の係数 b_{-1} を $f(z)$ の a における**留数**といい、記号 $\mathrm{Res}(f,a)$ で表す。

曲線 C を a を内部に持つ閉曲線、$f(z)$ は $0<|z-a|<R$ で正則であるとする。$f(z)$ を C に沿って項別積分すれば、先ほど述べた例 1 により、$\dfrac{b_{-1}}{z-a}$ 以外の項の積分は 0 になる。

すなわち

$$\int_C f(z)dz = \int_C \sum_{m=-\infty}^{\infty} b_m(z-a)^m dz = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \int_C b_m(z-a)^m dz = 2\pi i b_{-1} = 2\pi i\,\mathrm{Res}(f,a).$$

ここから次の結果を得る。

留数定理：$f(z)$ の a を中心とするローラン展開を $f(z) = \displaystyle\sum_{m=-\infty}^{\infty} b_m(z-a)^m$ とするとき、

$$\int_C f(z)dz = 2\pi i b_{-1} = 2\pi i \operatorname{Res}(f,a).$$

3　考察と感想

微分積分における$\frac{1}{x}$と対数関数の関係を調べるために複素関数に拡張して考えてみたが、(2.2) に見られるように、$\frac{1}{z}$の積分の実部はそのまま対数関数で現れた。興味深い状況はむしろ虚部に見ることができる。例1を見ると確かに-1次のときのみ異なることが起こっている。これは複素平面における対数関数の多価性に関連している。多価性が現れるのは対数関数だけではない。対数関数由来であるが、べき関数にも同様に現れる。多価性とリーマン面のところで述べたz^αの多価性は、αが無理数の場合は対数関数の多価性と一致する。しかし対数関数の多価性は、ひとまわりするごとに$2\pi i$ずつダイナミックに刻むことにより生じており、他の関数の多価性に比べて顕著な特徴を見せている。ある見方をすれば、それはかえって自然な多価性である。

本稿を書き始めたときの感覚は、x^nの微分積分は、$n=-1$のときだけは他の場合と統一的に論じられず厄介者というものであった。しかし留数定理を改めて考えてみると、$n=-1$の場合だけで$f(z)$の閉曲線における積分のすべてを担っていることに気が付く。また本稿では特には述べなかったが、コーシーの積分公式も結局-1次のところの積分から関数の値がわかることで成り立っている。このように、まわりと異なる顔を見せているところに実はすべてのことが集約されているような事態は数学でしばしば起こる。

また、実部においては実関数と同じものが現れただけなのであるが、とにかく他の次数とは異なることが起こっている。正則関数のところで述べたように、正則関数の実部と虚部は連動していて独立に関数を決めることはできないのであるから、これは複素関数のこの次数、すなわち-1次における特殊性の一つの側面ととらえることができる。

これは例えば、「実関数の展開$\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \ldots$の左辺はすべての実数で意味を持つのに、複素関数の展開$\frac{1}{1+z^2} = 1 - z^2 + z^4 - z^6 + \ldots$と同様$|x| < 1$でしか収束しない」ということ、また「特異点を持つ関数を実変数に置き換えてグラフを描いたときにも、その特異性の一端が見えることが多い－例えば、$z=0$は$f(z) = \frac{\sin z}{z}$の真性特異点であるが、これを実関数として描くと$x=0$のと

ころで無限回振動している」ということなどと同じような状況だと思われる。

x^{-1} の積分の特徴として、次のような側面にも気が付く。オイラーの公式

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x$$

により、生まれも育ちも異なる指数関数と三角関数の間に関係がついた。$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$ でも、多項式の級数において三角関数と関連がありそうなπが登場している。本稿の動機付けである式

$$\int \frac{1}{x} dx = \log x + \mathrm{constant}$$

も非常に初等的な事柄でありながら、多項式と対数関数という異質なものの間に関係を付けている。

参考文献

[1] W. Dunham：オイラー入門（黒川信重，若山正人，百々谷哲也訳），シュプリンガー・フェアラーク東京株式会社，2004.
[2] 儀我真理子：神奈川大学講義録「複素関数論」，2016.
[3] 神保道夫：複素関数入門，岩波書店，1995.
[4] 田村二郎：解析函数，裳華房，1971.

あとがき

昔から不思議に思ってきたものに次のものもある。フェルマーの原理「光は最短の時間で到達する経路を選ぶ」である。結果は美しいが、光はどのようにその道筋が一番速いと知るのだろうか。

何年も前であるが、ある日新丸子の図書室で物理関係の本をぱらぱら見ていたとき、一つの図が目に入った。その図を見た瞬間フェルマーの原理に関する私の疑問はほぼ氷解したのである。そして同時にその考え方は他のことにも応用できることにも気が付いた。私としては、印象に残る新丸子の思い出である。

（受付日　平成 28 年　9 月 30 日）
（受理日　平成 28 年 11 月 30 日）