〈 総説 〉

Hilbert 空間上の有界線形作用素の数域

儀我 真理子 *

Numerical Range for Bounded Linear Operators on Hilbert Space

Mariko GIGA *

1. イントロダクション

作用素論においては，作用素不等式，作用素のクラス，スペクトルに関すること，作用素平均に関することなど多くの切り口があり，それらはお互いに関係し合っている．ここでは，numerical range (数域) という切り口で作用素を見ることとし，その中でも特に numerical range の形の話を主に述べる．numerical range とスペクトルは深い関係を持っている．

ここで扱う数は，特に断らない限り複素数 $\mathbb{C}$ とする．

定義 1.1　Hilbert 空間 H 上の有界線形作用素 T の **numerical range** (数域) とは，複素平面 $\mathbb{C}^2$ における集合

$$W(T) := \{(T\mathbf{x}, \mathbf{x}) : \mathbf{x} \in H, ||\mathbf{x}|| = 1\} \tag{1.1}$$

のことをいう．ここで T は線形作用素，$(\cdot, \cdot)$ 及び $||\cdot||$ は H における内積，ノルムをそれぞれ表す．

Hilbert 空間上の有界線形作用素 T の **numerical radius** (数域半径) とは，

$$w(T) := \sup\{|(T\mathbf{x}, \mathbf{x})| : \mathbf{x} \in H, ||\mathbf{x}|| = 1\} \tag{1.2}$$

のことをいう．

次の命題は定義 1.1 からすぐわかる．

命題 1.2 ([1])　Hilbert 空間上の有界線形作用素 T について，

*日本医科大学・数学教室　Department of Mathematics, Nippon Medical School

(1) $W(T)$ はユニタリー相似に関して不変である． ここで T と S がユニタリー相似であるとは，あるユニタリー作用素 U が存在して，$S = U^*TU$ と表せることである（但し U^* は U の共役作用素）．

(2) $W(T^*) = \{\bar{\lambda} : \lambda \in W(T)\}$.

(3) 恒等作用素 I について，$W(I) = \{1\}$.

(4) 複素数 α, β について，$W(\alpha T + \beta I) = \alpha W(T) + \beta$.

有限次元の作用素は行列で表されるが，単純な行列においてもその numerical range を求めることはそれほど簡単ではない．

例 1.3 次の行列 T の numerical range は，原点中心，半径 $\frac{1}{2}$ の closed な円である．

$$T = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

（解） $\mathbb{C}^2$ における単位ベクトルを次のようにおく．

$$\mathbf{x} = e^{i\varphi} \begin{pmatrix} t \\ e^{i\theta}\sqrt{1-t^2} \end{pmatrix} \qquad (\varphi, \theta \text{は実数，} \quad 0 \le t \le 1)$$

$$\begin{aligned}(T\mathbf{x}, \mathbf{x}) &= {}^t(T\mathbf{x})\,\bar{\mathbf{x}} = {}^t\left(e^{i\varphi}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} t \\ e^{i\theta}\sqrt{1-t^2} \end{pmatrix}\right) e^{-i\varphi}\begin{pmatrix} t \\ e^{-i\theta}\sqrt{1-t^2} \end{pmatrix} \\ &= e^{i\theta} t\sqrt{1-t^2} \end{aligned} \tag{1.3}$$

これは，原点中心，半径 $t\sqrt{1-t^2}$ の closed な円である．$0 \le t \le 1$ のとき，

$$0 \le t\sqrt{1-t^2} \le \frac{1}{2} \tag{1.4}$$

であることはすぐ計算できるので，結論を得る． □

（注意） ここでベクトル $\mathbf{x}$ は $\mathbb{C}^2$ における円周である．しかし T の numerical range は，$\mathbb{C}$ において中まで詰まった円である．

ここで，以後本論で使う主な記号を述べておく．

- $d(a, b)$ は a, b の距離を表す．
- $\sigma(T)$ はスペクトル，$r(T)$ はスペクトル半径を表す．

- conv$\{A\}$ は集合 A の convex hull, $\overline{W}$ は numerical range の closure を表す.
- $||\cdot||$ は，ベクトルに関しては H におけるノルムを表し，作用素に関しては作用素ノルムを表す.

2．2×2 行列の numerical range

numerical range がどのような形になるかは一般的には言えていない．しかし 2×2 行列に関しては，その形はすべてわかっている ([5], [7], [10])．結論を簡単に言うと，

> 2 次元 Hilbert 空間上の numerical range はその固有値を焦点とする closed な楕円である．ただし退化した場合（線分や 1 点になった場合）を含む.

例 2.1　次の行列 T の numerical range は，原点中心，半径 $\frac{\mu}{2}$ の closed な円を λ だけずらしたものである.

$$T=\begin{pmatrix}\lambda & \mu\\ 0 & \lambda\end{pmatrix}$$

（解）　例 1.3 より，$N=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}$ の numerical range は，原点中心，半径 $\frac{1}{2}$ の円であった．$T=\lambda I+\mu N$ と表されるから，命題 1.2(4) より，$W(T)=\lambda+\mu W(N)$.

□

定義 2.2　2×2 行列において，対角要素がすべて 0 であるような行列を **cross-diagonal** な行列という.

（注意）　3 次以上の行列まで含めた **cross-diagonal** な行列の定義は「普通の意味の対角要素ではない方の対角な要素以外の要素はすべて 0 である行列」という言い方になる.

命題 2.3　cross-diagonal な行列 T の numerical range は，固有値を焦点とする closed な楕円，または固有値を含む線分になる.

（証明）先ず，成分が正の場合を考える．すなわち　$S = \begin{pmatrix} 0 & |a| \\ |b| & 0 \end{pmatrix}$　$(0 < |b| \leq |a|)$ とおく．

$\begin{pmatrix} 0 & |a| \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ については，例 1.3 の (1.3) の形を使い，$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ |b| & 0 \end{pmatrix}$ については，命題 1.2(2) で adjoint operator を考えて例 1.3 の (1.3) の形を使うことにより，

$$\begin{aligned} W(S) &= \left\{ t\sqrt{1-t^2}[|a|e^{i\theta} + |b|e^{-i\theta}] : \theta \in \mathbb{R}, 0 \leq t \leq 1 \right\} \\ &= \left\{ t\sqrt{1-t^2}[(|a|+|b|)\cos\theta + i(|a|-|b|)\sin\theta] : \theta \in \mathbb{R}, 0 \leq t \leq 1 \right\}. \end{aligned}$$

例 1.3 の (1.4) を使うことにより，

(1) $|a| = |b|$ のとき，S の numerical range は，線分 $[-|a|, |a|]$，

(2) $|a| \neq |b|$ のとき，S の numerical range は，原点中心，水平方向に長軸 $|a|+|b|$，垂直方向に短軸 $|a|-|b|$ を持つ closed な楕円

になる．楕円の性質により，中心から２つの焦点までの距離は

$$\sqrt{\left(\frac{|a|+|b|}{2}\right)^2 - \left(\frac{|a|-|b|}{2}\right)^2} = \sqrt{|ab|}$$

であるから，この焦点は S の固有値になる．

この命題で考えている一般の行列 $T = \begin{pmatrix} 0 & a \\ b & 0 \end{pmatrix}$ については，$a = |a|e^{i\alpha}, b = |b|e^{i\beta}$ $(\alpha, \beta \in \mathbb{R})$ とすると，ユニタリー行列 $U = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{i\frac{\alpha-\beta}{2}} \end{pmatrix}$ について，

$$UTU^{-1} = e^{i\frac{\alpha+\beta}{2}} \begin{pmatrix} 0 & |a| \\ |b| & 0 \end{pmatrix} \tag{2.1}$$

となる．また，焦点についても

$$\pm\sqrt{|a||b|}e^{i\frac{\alpha+\beta}{2}} = (ab)^{\frac{1}{2}} = T \text{ の固有値}$$

となるので，結果を得る．■

命題 2.4　trace が 0 の 2×2 行列は，対角成分が 0 である行列とユニタリー相似である．

すべての 2×2 行列 T は，$T - \frac{1}{2}(\mathrm{trace}T)I$ で置き換えることにより，trace が 0 であるようにできる．命題 1.2(4) を思い出すと，この変換により numerical range の形は変わらない．上の命題 2.4 が成立しているので，命題 2.3 により，すべての 2×2 行列の numerical range は楕円であることが示せた．

もう一度 $S = \begin{pmatrix} 0 & |a| \\ |b| & 0 \end{pmatrix}$ $(0 < |b| \leq |a|)$ なる行列を考える（$0 < |a| \leq |b|$ のときは共役な行列を考えればいいので，この仮定をおくことにより一般性を失うことはない）．S の固有値は $\lambda_1 = \sqrt{|a||b|}, \lambda_2 = -\sqrt{|a||b|}$ となり，その正規化された固有ベクトルは

$$\mathbf{f_1} = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{|b|}{|a|}}} \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{\frac{|b|}{|a|}} \end{pmatrix}, \mathbf{f_2} = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{|b|}{|a|}}} \begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{\frac{|b|}{|a|}} \end{pmatrix}$$

となる．

$$\gamma := (\mathbf{f_1}, \mathbf{f_2}) = \frac{|a| - |b|}{|a| + |b|} = \frac{\text{短軸の長さ}}{\text{長軸の長さ}}$$

とおくと，

$$\sqrt{1 - \gamma^2} = \frac{2\sqrt{|ab|}}{|a| + |b|} = \frac{\lambda_1 - \lambda_2}{\text{長軸の長さ}}$$

が楕円の離心率となる．だから，固有値と γ を用いて 2 つの軸の長さを表すと，

$$\text{長軸の長さ} = \frac{\lambda_1 - \lambda_2}{\sqrt{1 - \gamma^2}}$$

$$\text{短軸の長さ} = \gamma \times \frac{\lambda_1 - \lambda_2}{\sqrt{1 - \gamma^2}}$$

となる．一般の cross-diagonal な行列 $T = \begin{pmatrix} 0 & a \\ b & 0 \end{pmatrix}$ については，(2.1) により

$S = \begin{pmatrix} 0 & |a| \\ |b| & 0 \end{pmatrix}$ とユニタリー相似であることが言えていた．

2 つの固有値が等しいときには, すべての行列 T において, $T - \lambda I$ は $\begin{pmatrix} 0 & a \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ とユニタリー相似であることが言えるので, 例 1.3 と同様の考え方から $W(T - \lambda) = \{z : |z| \leq \frac{|a|}{2}\}$ が言える．

結局すべての 2×2 行列 T について，次の定理が得られた．

定理 2.5　相異なる固有値 λ_1,λ_2 を持つ 2×2 行列 T について，対応する正規化された固有ベクトルを $\mathbf{f_1},\mathbf{f_2}$ とし，$\gamma=|(\mathbf{f_1},\mathbf{f_2})|$ とおくと，

(1) $W(T)$ は固有値 λ_1,λ_2 を焦点に持つ（退化しているときもある）closed な楕円である．

(2) 楕円の長軸の長さは $\frac{\lambda_1-\lambda_2}{\sqrt{1-\gamma^2}}$, 短軸の長さは $\gamma\times\frac{\lambda_1-\lambda_2}{\sqrt{1-\gamma^2}}$ である．ここで γ は，固有値 λ_1,λ_2 に対応する固有ベクトルの内積 $(\mathbf{f_1},\mathbf{f_2})$ である．

特に，T がただ一つの固有値 λ をもつとき，$W(T)$ は中心 λ，半径 $\frac{1}{2}||T-\lambda I||$ の closed な円である．

例 2.6　$T=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ の numerical range は，焦点 $0,1$，長軸と短軸の長さがそれぞれ $\sqrt{2},1$ の closed な楕円である．

例 2.7　$T=\begin{pmatrix} 1+i & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ の numerical range は，0 と $1+i$ を結ぶ線分（但し両端点も含む）であり，退化した楕円になる．

３．Toeplitz-Hausdorff の定理

2×2 行列において得た numerical range についての結果は，3 次以上の行列に対してそのまま拡張することはできない．

例 3.1　$T=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ の numerical range は，1 の立方根 $1,\omega,\omega^2$ を頂点とする三角形である．

ここで，Toeplitz-Hausdorff の定理を述べる．

定理 3.2　(Toeplitz-Hausdorff の定理)([8], [14]) 有界線形作用素 T の numerical range $W(T)$ は，convex である．

まず Toeplitz が $W(T)$ の境界が convex であることを示し，その後 Hausdorff が単連結であることを示した．この美しく単純な定理にはたくさんの証明が与えられてきた．Cartesian decomposition で表現して，convex の定義を使う方針の

もの，compression を考えて 2 次元の結果に帰着させるものなどがある.

命題 2.4 の一般化である次の定理は，Toeplitz-Hausdorff の定理を使って示すことができる.

定理 3.3　([11]) $n \times n$ 行列 T の trace が 0 のとき，T は対角成分がすべて 0 の行列とユニタリー相似になる.

定義 3.4　Hilbert 空間上の有界線形作用素 T が**対角化可能**であるとは，適当なユニタリー行列に関して対角行列とユニタリー相似であるようにできることである.

有限次元における normal 作用素は対角化可能である．自己共役作用素ももちろんそうである．例 2.7，例 3.1 の T は normal 作用素である．もっと一般に compact な normal 作用素も対角化可能であることが言える．対角化可能であるという性質と Toeplitz-Hausdorff の定理を使って次の定理が得られる.

定理 3.5　対角化可能な作用素の numerical range は，その作用素の固有値の convex hull である.

4．numerical range とスペクトル

有限次元の行列の場合は, 明らかに numerical range はスペクトル（ここでは固有値になる）を含む．しかし一般の作用素では成立しない．たとえば, $T = \mathrm{diag}\{\frac{1}{\mathrm{n}} : \mathrm{n} = 1, \dots\}$ とすると, numerical range は $(0, 1]$, スペクトルは $\{\frac{1}{n} : n = 1, \dots\} \cap \{0\}$ であるから $(0, 1]$ には入らない．しかし，次の定理が成立する.

定理 4.1　有界線形作用素 T について，そのスペクトルは T の numerical range の closure に含まれる.

定理 4.1 より，スペクトルは相似変換で不変であることと Toeplitz-Hausdorff の定理を使うと次のことがすぐにわかる：

$$\mathrm{conv}\{\sigma(T)\} \subset \bigcap \{\overline{W}(VTV^{-1}) : V \text{ invertible}\} \tag{4.1}$$

命題 4.2　([3],[13]) 有界線形作用素 T について次が成立する.

$$r(T) = \inf\{||VTV^{-1}|| : V \text{ invertible}\}$$

このことを使うと，(4.1) において等号が成立することが証明できる：

定理 4.3　(Hildebrandt の定理)([9],[15])　有界線形作用素 T について次が成立する．

$$\mathrm{conv}\{\sigma(T)\} = \bigcap \{\overline{W}(VTV^{-1}) : V \text{ invertible}\}$$

定理 4.4　有界線形作用素 T について次が成立する．左の不等式は $\mu \notin \sigma(T)$，右の不等式は $\mu \notin \overline{W}(T)$ のもとで成立している．

$$\frac{1}{d(\mu, \sigma(T))} \le ||(T-\mu)^{-1}|| \le \frac{1}{d(\mu, \overline{W}(T))}.$$

定義 4.5　convex set C の **corner point** とは，C の boundary 上の点で，角度が π より小さい C に含まれる sector の頂点のことである．

一般に，convex set の boundary は，可算個の corner point を除いて微分可能であることが知られている．

定理 4.6　([4]) (Donoghue の定理)　有界線形作用素 T について，$\lambda \in W(T)$ が $W(T)$ の corner point であれば，λ は固有値である．

この定理において $\lambda \in W(T)$ を仮定したことは本質的である．λ がただ単に $W(T)$ の boundary 上の点としたのでは上の結論は得られない．

定義 4.7　有界線形作用素 T の固有値が **normal** であるとは，

$$\ker\{T - \lambda I\} = \ker\{T^* - \bar{\lambda} I\}$$

が成り立つことである．この言葉は normal な作用素がこれを満たすことから来ている．

定理 4.8　([2],[9]) (boundary 上の固有値における Hildebrandt の定理)　numerical range における boundary 上のすべての固有値は normal な固有値である．

系 4.9　有界線形作用素 T について，$\lambda \in W(T)$ が $W(T)$ の corner point であれば，λ は normal な固有値である．

5. numerical radius

numerical radius（数域半径）に関する性質をいくつか述べる．

定理 5.1　有界線形作用素 T について次が成り立つ．

$$\frac{1}{2}||T|| \leq w(T) \leq ||T||.$$

この定理から operator norm と numerical radius は同値であることがわかる．

定理 5.2　([12]) T を有界線形作用素とするとき，任意の自然数 n に対して次が成り立つ．

$$w(T^n) \leq w(T)^n.$$

定理 5.3　有界線形作用素 T について次が成り立つ．

$$r(T) \leq w(T) \leq ||T||.$$

特に，normal 作用素においては次が成り立つ．

$$r(T) = w(T) = ||T||.$$

X を複素平面上の有界閉集合とすると，

$$\mathrm{conv}\{X\} = \{X \text{ を含むすべての円の共通部分 }\}$$

が成り立つことを使うと，次の定理を得る．

定理 5.4　([5],[6]) 有界線形作用素 T について次が成り立つ．

$$\overline{W}(T) = \bigcap_{\mu \in C} \{\lambda : |\lambda - \mu| \leq w(T - \mu I)\}.$$

参考文献

[1] R. Bhatia : Matrix analysis, Springer, 1996.

[2] P. S. Bourdon and J. H. Shapiro : When is zero in the numerical range of a composition operator? Integral Equations and Operator Theory, Vol. 44 (2002), 410–441.

[3] M. Cho, M. Giga and A. H. Kim : Spectrum and Principal Function of Operators, Operator Theory: Advances and Applications, Vol.187 (2008), 117–123.

[4] W. F. Donoghue : On the numerical range of a bounded operator, Michigan Mathematical J., Vol. 4 (1957), 261–263.

[5] T. Furuta : 線形作用素への誘い，培風館, 2001.

[6] T. Furuta, M. Giga and M. Yanagida : Simple proof of jointly concavity of the relative operator entropy $S(A|B) = A^{\frac{1}{2}} \log(A^{-\frac{1}{2}} BA^{-\frac{1}{2}})A^{\frac{1}{2}}$, Mathematical inequalities and applications, Vol. 6, No.4, (2003), 713–714.

[7] P. R. Halmos : Hilbert Space Problem Book, Springer-Verlag, New York, 1982.

[8] F. Hausdorff : Der Wertvorrat einer Bilinearform, Math. Z., 3 (1919), 314–416.

[9] Hildebrandt : Über den Numerischen Wertebereich eines Operators, Math. Ann., 163 (1966), 230–214.

[10] C. -K. Li : A simple proof of the elliptical range theorem, Proceeding of the American Mathematical Society, Vol. 124, No. 7 (1996), 1985–1986.

[11] W. V. Parker : Set of complex numbers associated with a matrix, Duke Math. J., Vol. 15 (1948), 711–715.

[12] C. Pearcy : An elementary proof of the power inequality for the numerical radius, Michigan Math. J., Vol. 13 (1966), 289–291.

[13] G. C. Rota : On models for linear operators, Comm. Pure Appl. Math., 13 (1960), 469–472.

[14] O. Toeplitz : Das algebraische Analogon zu einem Satz von Fejér, Math. Z., 2 (1918), 187–197.

[15] J. P. Williams : Similarity and the numerical range, J. Math. Anal. App., 26 (1969), 307–314.

（受付日　平成 26 年 6 月 18 日）
（受理日　平成 26 年 9 月　5 日）