〈総説〉

数学的散乱理論について

中澤 秀夫 *

On Mathematical Scattering Theory

Hideo NAKAZAWA *

1. はじめに

数学といってもその対象は広大である. ここでは偏微分方程式論や函数解析学の直接の応用分野の一つである数学的散乱理論について, これまでの研究の経過を振り返り, 何が問題とされ研究されてきたのかについて説明を与える. 著者の関わった問題や未解決問題等についても触れる.

2. 歴史的経緯

フォン・ノイマン[1] による「量子力学の数学的基礎」[2] が 1932 年に出版され, 数学的枠組みであるヒルベルト空間[3] とそこで定義された非有界線型作用素が量子力学の舞台として設定され, それまでの二つの理論である, ハイゼンベルグ[4] -ボルン[5]-ジョルダン[6] による行列力学と, シュレーディンガー[7]による波動力学

*日本医科大学・医学部・基礎科学科・数学教室　Department of Mathematics, Nippon Medical School

[1]Johannes Ludwig von Neumann, 1903 年 12 月 28 日–1957 年 2 月 8 日, ハンガリー出身のアメリカ合衆国の数学者.

[2]J. von. ノイマン, 量子力学の数学的基礎 (広重徹・井上健・恒藤敏彦共訳), みすず書房 (1957), 376pp. (=J. von Neumann, Mathematische Grundlagen der Quantenmechanik, Springer Berlin, 1932, 262pp.)

[3]内積から導かれたノルムに関して完備な距離空間をいう. D. Hilbert により導入されたことに因んでヒルベルト空間と呼ばれる.

[4]Werner Karl Heisenberg, 1901 年 12 月 5 日-1976 年 2 月 1 日, ドイツの理論物理学者.

[5]Max Born, 1882 年 12 月 11 日–1970 年 1 月 5 日, ドイツ生まれのイギリスの理論物理学者.

[6]Ernst Pascual Jordan, 1902 年 10 月 18 日-1980 年 7 月 31 日, ドイツの物理学者

[7]Erwin Rudolf Josef Alexander Schrödinger, 1887 年 8 月 12 日–1961 年 1 月 4 日, オーストリア＝ハンガリー帝国ウィーン出身の理論物理学者.

の統一がなされ, 量子力学の数学的な原理が確立された. とりわけ重要な事として, 量子力学における物理量はスペクトル分解可能な対称作用素 (これを自己共役作用素という) でなければならないことが明らかにされた. しかし, この理論の枠組みで, ヘリウム原子の束縛状態の存在を証明できるのか, また実際の物理系の全エネルギーを表すハミルトニアンを取り扱うことは可能なのか, 等の問題について, はっきりとしたことは判っていなかった. これを問題として解決したのが 1951 年に出版された加藤敏夫（当時の所属は東大理学部物理学科）[8]の論文「Fundamental properties of Hamiltonian operators of Schrodinger type. Trans. Amer. Math. Soc. 70, (1951). 195–211」である. この中で, 加藤は, ハミルトニアンの自己共役性に関して数学的に厳密な証明を初めて与えた. この研究以降, 物理的な対象の真に数学的な研究としての数学的散乱理論の研究が始まった. 加藤はまた, 固有値の摂動論を線型作用素のスペクトル理論として研究し, その結果は主著「Perturbation theory of linear operators」[9]に纏められている. この書物はこの分野における基本的文献の一つとしての地位を獲得して久しい.

3. 波動作用素の存在と完全性の問題

以下では $x = (x_1, x_2, \cdots, x_d) \in \mathbb{R}^d$ とする. まず 2 体短距離型散乱理論の完成が問題となった. これは短距離型ポテンシャルを摂動項として含むシュレーディンガー作用素に対する波動作用素や散乱作用素の存在を示す問題である.

より詳しくは, 次のようになる. シュレーディンガー作用素とは次の形の微分作用素をいう：

$$H = -\Delta + V(x), \qquad \mathcal{D}(H) \subset L^2(\mathbb{R}^d)$$

但し空間次元 d は $d \geqq 3$ とし,

$$-\Delta = \sum_{k=1}^{d} \frac{\partial^2}{\partial x_k^2}$$

はラプラシアンと呼ばれる微分作用素, また, 作用素 H の定義域 $\mathcal{D}(H)$ は次で定義される：

$$\mathcal{D}(H) = \left\{ f \in L^2(\mathbb{R}^d);\ Hf \in L^2(\mathbb{R}^d) \right\},$$

[8] 1917 年 8 月 25 日–1999 年 10 月 2 日, 栃木県鹿沼市出身の数学者.

[9] Tosio Kato, Perturbation Theory for Linear Operators (Classics in Mathematics), Springer; Reprint of the Corr. 2nd ed. Berlin, Heidelberg, New York, 2013, 648pp.

ここに $L^2(\mathbb{R}^d)$ は量子力学の舞台である自乗可積分な関数全体のなすヒルベルト空間であり, その定義は

$$L^2(\mathbb{R}^d) = \{f;\ ||f|| < \infty\}, \quad ||f||^2 = \int_{\mathbb{R}^d} |f(x)|^2 dx$$

で与えられる[10]. 簡単のため, 関数 $V(x)$ は何回でも微分可能な実数値関数で, 空間遠方で -1 乗よりも早く減衰すると仮定する：

$$V(\cdot) \in C^\infty(\mathbb{R}^d), \quad |V(x)| \leqq {}^\exists C(1+r)^{-1-\delta} \tag{3.1}$$

但し C 及び δ は x に依存しないある正定数, また $r = |x| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_d^2}$ は原点 0 から点 x までの距離を表す.

上記の設定の下で, 作用素 H は定義域を $\mathcal{D}(H)$ として自己共役作用素 (フォン・ノイマンの書物でいうところの "超極大エルミート作用素") となる.

物理的なイメージとして, 摂動 $V(x)$ は空間遠方で ((3.1) の意味で) 十分早く減衰しているので, 時刻が十分経過した後には, 系の運動は摂動項のない自由なハミルトニアン $H_0 = -\Delta$ で近似できるであろう事が想像される. この問題を数学的に厳密に取り扱うために, 以下のように考える.

まず, 物理的に意味のある観測量は散乱行列であり, これに係わる数学的対象が散乱作用素 S であるが, この定義のために必要な作用素が波動作用素 $W_\pm$ である. 即ち

$$W_\pm = \operatorname*{s-lim}_{t\to\pm\infty} e^{itH_0} e^{-itH}$$

が波動作用素の定義である. 上で注意したように H 及び H_0 は自己共役作用素となるのでストーンの定理[11] によって $\{e^{-itH_0}\}_{t\in\mathbb{R}}$ 及び $\{e^{-itH}\}_{t\in\mathbb{R}}$ は $L^2(\mathbb{R}^d)$ 上のユニタリー群となっている. もしも波動作用素が存在して完全: $\mathcal{R}(W_+) = \mathcal{R}(W_-)$ [12]ならば, 散乱作用素 S は

$$S = W_+^{-1} W_-$$

によって定義される. 従って, 数学的な問題として,

① どんな摂動 $V(x)$ に対して波動作用素が存在するか？

---

[10] A. Lebesgue によって導入されたことに因み, ルベーグ空間とも呼ばれる.

[11] A. Pazy, Semigroups of Linear Operators and Applications to Partial Differential Equations (Applied Mathematical Sciences), Springer-Verlag, New York-Berlin-Haidelberg-Tokyo, 1st ed. 1983. Corr. 2nd printing 1992, 296pp の 41 頁の Theorem 1.10.8.

[12] ここに $\mathcal{R}(X)$ は作用素 X の値域を表す.

② どんな摂動 $V(x)$ に対して波動作用素が完全となるか？
が主要な問題となる．2 体短距離型摂動 (3.1) に対しては 1970 年迄に加藤敏夫[13], 黒田成俊[14] 等によりこれらの問題が解決された．

しかし物理的にも重要な例であるクーロン力を取り扱うためには (3.1) の仮定では不満が残る．そこで

$$|V(x)| \leqq C(1+r)^{-\delta} \quad (\delta > 0) \tag{3.2}$$

のようなポテンシャル (これを長距離型摂動と呼ぶ) を許す場合の数学的取り扱いの研究がその後になされ,「短距離型の場合と同様の意味での波動作用素は存在しないがそれを修正した波動作用素は存在する」という修正波動作用素の存在に関するドラードによる結果[15]を経てエンス[16] による時間に依存した方法の開発により, 問題 ①–② が解決された．一方 $N(\geqq 3)$ 粒子系のシュレーディンガー作用素に対する研究はファデーエフ[17]以降あまり進んでいなかったが, エンス自身が彼の方法を応用することで 3 体シュレーディンガー作用素の漸近完全性を証明した[18]．この方法とともに, ムーレによって開発されたムーレ評価の方法[19]は, 2 体問題だけでなくより一般の多体問題の場合にも威力を発揮することがその後のシーガル—ゾーファー[20]等の研究で示され, ついには, 長距離型多体問題に対する波動作用素の漸近完全性の問題 ①–② が, デレジンスキー [21] によって証明された．

---

[13] T. Kato, Some results on potential scattering, Proc. Intern. Conf. on Funct. Anal. and Related Topics, 1969, Univ. of Tokyo Press, Tokyo, pp.206–215.

[14] S. T. Kuroda, Some remarks on scattering theory for Schrödinger operators, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo, ser I, 17 (1970), pp.315–329.

[15] J. Dollard, Asymptotic convergence and Coulomb interaction, J. Math. Phys., 5 (1964) pp.729–738.

[16] V. Enss, Asymptotic completeness for quantum mechanical potential scattering, II. Singular and long-range potentials, Ann Phys, 119 (1979) pp.117–132.

[17] L. D. Faddeev, Mathematical aspects of the three body problem in quantum scattering theory, Trudy Math. Inst. Steklov, 49 (1963) pp.1–122 (Russian); English translation: Israel Program for Scientific Translations, Jerusalem (1965)

[18] V. Enss, Completeness of three body quantum scattering, Dynamics and Processes (Proceedings Bielefeld), P. Blanchard and L Streit eds, Springer Lecture Notes in Math., 1031 (1983) pp.62–88.

[19] E. Mourre, Absence of singular spectrum for certain self-adjoint operators, Comm. Math. Phys. 78 (1981) pp.391–408.

[20] I. M. Segal and A. Soffer, The N-particle scattering problem : Asymptotic completeness for short-range systems, Ann. Math. 126 (1987) pp.35–108.

[21] J. Derezinski, Asymptotic completeness of long-range quantum systems, Ann. Math., 138 (1993) pp.427–473.

4. 波動方程式の散乱理論

散乱理論は量子力学におけるシュレーディンガー方程式だけでなく, クラインゴルドン方程式, ディラック方程式や相対論的シュレーディンガー方程式などに対しても同様に考えられる. また古典物理学における波動方程式や弾性波動方程式, 電磁気学におけるマクスウェル方程式に対しても問題となる.

古典物理学における波動方程式は次の形をとる：

$$\begin{cases} w_{tt}(x,t) - \Delta w(x,t) = 0, & (x,t) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}, \\ w(x,0) = w_0(x), \quad w_t(x,0) = w_1(x), & x \in \mathbb{R}^d. \end{cases} \tag{4.1}$$

これに摂動を加えた方程式として例えば摩擦項を伴う波動方程式

$$\begin{cases} w_{tt}(x,t) - \Delta w(x,t) + b(x) w_t(x,t) = 0, & (x,t) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}, \\ w(x,0) = f(x), \quad w_t(x,0) = g(x), & x \in \mathbb{R}^d. \end{cases} \tag{4.2}$$

を考える. 但し 摩擦項の係数関数 $b(x)$ は非負の実数値関数であるとする. このとき方程式 (4.2) 第 1 式の両辺に $w_t(x,t)$ を乗じて $\mathbb{R}^d \times [0,t]$ で部分積分することにより, 次のエネルギー等式を得ることが容易に判る：

$$||w(t)||_E^2 + \int_0^t \int_{\mathbb{R}^d} b(x) |w_t(x,\tau)|^2 dx d\tau = ||w(0)||_E^2, \quad (t \geqq 0)$$

但し

$$||w(t)||_E^2 = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^d} \left\{ |w_t(x,t)|^2 + |\nabla w(x,t)|^2 \right\} dx$$

は時刻 t における解の全エネルギーを表す. $b(x) \geqq 0$ であるから上式左辺第 2 項は非負, 従って直ちに

$$||w(t)||_E^2 \leqq ||w(0)||_E^2 \quad \text{for any} \quad t \geqq 0$$

であることが従う. これより, どういった関数 $b(x)$ に対して時刻 t における全エネルギーが時刻無限大の極限において 0 となるのかならないのか？ が問題となる. この問題に対して最初に解答を与えたのが望月清である.

Theorem 4.1. (Mochizuki[22]) 空間次元 d は 2 でないとし, 関数 $b(x)$ は次を満たすとする：

$$0 \leqq b(x) \leqq b_0 (1+r)^{-1-\delta} \quad (\delta > 0),$$

[22] K. Mochizuki, Scattering theory for wave equations with dissipative terms, Publ. Res. Inst. Math. Sci., 12, no. 2, (1976/77), pp.383–390.

但し b_0 と δ は x に依存しない正定数とする．このとき時刻 t における解の全エネルギーは時刻無限大で 0 に減衰せず, 更に摩擦項のない自由な波動方程式 (4.1) の解を与える初期データ (従って対応する解 $w_0(x,t)$) が存在して (4.2) の解 $w(x,t)$ は時刻無限大の極限でエネルギーノルムの意味で自由な解 $w_0(x,t)$ に漸近する：

$$||w(t) - {}^{\exists}w_0(t)||_E \to 0 \quad \text{as} \quad t \to +\infty.$$

つまり物理的には, 摩擦項の係数関数が上の定理の条件 (短距離型条件) の意味で, 空間遠方で十分早く減衰するならば, 摩擦の影響は十分時間が経過した後では無視することが出来, 従って系の全エネルギーは時刻が十分経過した後でも 0 にならず, 摩擦のない自由な系の運動で近似できる, というものである.

その後すぐにこれと対をなす結果が松村昭孝[23]によって示された. こちらの結果は物理的にもより自然なもので, 摩擦がある意味で空間遠方でも効いていれば, 全エネルギーはその摩擦の影響を受けて時刻無限大で 0 になるというものである.

これらはいずれも全空間 $\mathbb{R}^d$ における結果であるが, 後に我々は, 外部領域を含むより一般的な設定のもと, 摩擦項の係数関数の条件もより一般化した形でこれらの結果を統一的に拡張した結果を証明した：

Theorem 4.2. (Mochizuki-Nakazawa [24]) 初期値—境界値問題 (4.2) を全空間, 或いは, 原点に関して星状な外部領域 $\Omega(\subseteq \mathbb{R}^d)$ で考える．但し外部領域 Ω で考える場合には, 境界条件は Dirichlet 0 とする：

$$w(x,t) = 0 \quad \text{for} \quad (x,t) \in \partial\Omega \times (0,t).$$

(1) $d \geqq 1$ とし, $b(x)$ は

$$b_1(e+r)^{-1}\{\log(e+r)\}^{-1} \leqq b(x) \leqq b_2 \quad \text{for some} \quad b_1,\, b_2 > 0 \tag{4.3}$$

を満たすと仮定する．このとき, 時刻 t における (4.2) の解の全エネルギーは時間とともに 0 に減衰する：

$$||w(t)||_E^2 \leqq C\{\log(e+t)\}^{-\min(1,b_1/2)},$$

[23] A. Matsumura, Energy decay of solutions of dissipative wave equations, Proc. Japan Acad., 53 (1977), pp.232-236.

[24] K. Mochizuki and H. Nakazawa, Energy decay and asymptotic behavior of solutions to the wave equations with linear dissipation. Publ. Res. Inst. Math. Sci., 32, no. 3, (1996) pp.401–414.

ここに C はある正定数.

(2) $d \neq 2$ とし $b(x)$ は次を満たすとする：

$$0 \leqq b(x) \leqq b_3(e+r)^{-1}\{\log(e+r)\}^{-1-\delta}, \tag{4.4}$$

ここに b_3, δ は x に依存しない正定数. このとき時刻 t における (4.2) の解の全エネルギー $||w(t)||_E^2$ は $t \to +\infty$ で一般に減衰せず, 更に時刻無限大の極限で (4.1) の解 $w_0(x,t)$ にエネルギーノルムの意味で漸近する：

$$\lim_{t\to+\infty} ||w(t)||_E^2 \neq 0, \quad \lim_{t\to+\infty} ||w(t) - {}^{\exists}w_0(t)||_E^2 = 0.$$

この結果は, 特に (4.4) を仮定した場合には解は散乱状態になることを主張しているが, その場合の定常問題のスペクトル構造や極限吸収原理などの散乱理論の精密な議論はなされていなかった.

極限吸収原理に関しては摩擦項の係数関数の小ささを仮定することで証明することに成功した：

Theorem 4.3. (Nakazawa[25]) 空間次元 d は 2 でないとし, 摩擦項の係数関数 $b(x)$ に対しては次を仮定する：

$$|b(x)| \leqq b_4(1+r)^{-1-2\delta} \tag{4.5}$$

但し δ は正定数で, b_4 は以下のような正定数：

$$0 < b_4 < \frac{2-\sqrt{2}}{2}\delta.$$

このとき (4.2) の定常問題

$$(-\Delta - i\kappa b(x) - \kappa^2)u(x) = f(x) \quad x \in \mathbb{R}^d, \quad \kappa \in \mathbb{C} \tag{4.6}$$

に現れる作用素の族 [26]

$$L(\kappa) = (-\Delta - i\kappa b(x) - \kappa^2)$$

---

[25] H. Nakazawa, The principle of limiting absorption for the non-selfadjoint Schrödinger operator with energy dependent potential, Tokyo J. Math., 23, no. 2, (2000) pp.519–536.

[26] 勿論この作用素は自己共役にはならない.

に関して, 次のリゾルベント評価式が成り立つ：

$$|\kappa|^2||L(\kappa)^{-1}f||_{\varphi}^2 \leqq {}^{\exists}C||f||_{\varphi^{-1}}^2. \tag{4.7}$$

但し関数 φ は $\varphi(r)=(1+r)^{-1-\delta}$ である. 従って $L(\kappa)$ は, 空間 $X_{\varphi^{-1}}$ から X_{φ} への作用素として $\pm\Im\kappa \to 0$ の極限をもつ. 但しこれらの空間は,

$$X_{\varphi^{-1}} \subset L^2(\mathbb{R}^d) \subset X_{\varphi}$$

を満たすもので, 具体的には次で定義される：

$$X_w = \{v : ||v||_w < \infty\},$$

但し

$$||v||_w^2 = \int_{\mathbb{R}^d} w(x)|v(x)|^2 dx.$$

更にスペクトル構造に関しては, (4.5) に加えて $b(x) \geqq 0$, $0 < b_4 < \delta \leqq 1$ を仮定すると作用素の族 $L(\kappa)$ のスペクトルは本質スペクトルからなり, それは非負の実軸に一致する. また固有値 (点スペクトル) や剰余スペクトルは存在しないことが判るから, 本質スペクトルは連続スペクトルとも一致する：

$$\sigma(L(\kappa)) = \sigma_c(L(\kappa)) = \sigma_{ess}(L(\kappa)) = [0,\infty), \quad \sigma_p(L(\kappa)) = \sigma_r(L(\kappa)) = \emptyset.$$

この定理の評価式 (4.7) と加藤敏夫による滑らかな摂動の理論 (smooth perturbation theory)[27] により逆向きの波動作用素の存在は容易に示される[28].

なおこの定理で仮定したような $b(x)$ に対する小ささを外した場合の極限吸収原理や散乱状態の存在, スペクトル構造については未解明のままである.

5. クーロン型摩擦項を伴う波動方程式の定常問題のスペクトル構造

我々は後に特殊なクーロン型摩擦項を伴う波動方程式に対する陽な進行波解の表示を求め, 全エネルギーの指数的減衰, 対応する定常問題のスペクトル構造を決定する結果を得た：

---

[27] T. Kato, Wave operators and similarity for some non-selfadjoint operators, Math. Ann., 162, 1965/1966, pp.258–279.

[28] H. Nakazawa, On wave equations with dissipations, Proceedings of the 4th International conference "Analytical Methods of Analysis and Differential Equations" (AMADE-2006) (Minsk: Institute of Mathematics of NAS of Belarus), vol. 3, Differential Equations, 2006, pp.102–110.

Theorem 5.1. (Kadowaki-Nakazawa-Watanabe [29])

(1) 摩擦項を伴う波動方程式 (4.2) において摩擦項の係数関数が次で定義されるクーロン型であるとする：

$$b(x) = b(r) = \begin{cases} \dfrac{3-N}{r} & (N = 1,\, 2), \\ \\ \dfrac{N-1}{r} & (N \geqq 3). \end{cases} \tag{5.1}$$

(4.2) の初期データに対しては次を仮定する：

$$f(x) = f(r) = \begin{cases} rh(r) & (N = 1), \\ h(r) & (N \geqq 2), \end{cases} \qquad g(x) = g(r) = \frac{df(r)}{dr},$$

但し $h(r) = e^{-\beta r}k(r)$ (但し $\beta > 0$ はある定数) で $k(r)$ は急減少関数とする. このとき (4.2) の解は次で与えられる：

$$w(x,t) = w(r,t) = \begin{cases} rh(r+t) & (N = 1), \\ h(r+t) & (N \geqq 2). \end{cases}$$

(2) $d \geqq 3$ とし $b(x)$ は (5.1) を満たすとする. 方程式 (4.2) を時間発展方程式として

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} w(x,t) \\ w_t(x,t) \end{pmatrix} = iH_b \begin{pmatrix} w(x,t) \\ w_t(x,t) \end{pmatrix}$$

として表すと, 作用素 H_b は

$$H_b = i\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \Delta & -b(x) \end{pmatrix}$$

で与えられるが, 定義域を

$$\mathcal{D}(H_b) = \{\vec{v} = (v_1, v_2) \in E \,|\, H_b\vec{v} \in E\}$$

(但し E はエネルギー空間 $E = \left\{\vec{v} \,|\, ||v(\vec{t})||_E < \infty\right\}$) で定めると[30], H_b の固有値 (点スペクトル) は複素下半平面全体を覆い, 連続スペクトルは実軸全体に一致し, 剰余スペクトルはない. また複素上半平面はリゾルベント集合となる.

---

[29] M. Kadowaki, H. Nakazawa and K. Watanabe, Exponential decay and spectral structure for wave equation with some dissipations, Tokyo J. Math., 28, no. 2 (2005), pp.463–470.

[30] この作用素は自己共役にはならない.

この定理から特に判ることとして, 初期データを与える関数 $k(r)$ が有界な関数であれば解も指数減衰する関数となるので, 時刻 t における解の全エネルギーも指数的に減衰することが判る. 更に, もしも初期データを与える関数 $k(r)$ の台がコンパクトならば対応する解は消滅解[31]となる. これはマイーダ[32]によって抽象的に証明された事柄の具体例を与える.

なおこの定理で仮定された条件 (5.1) 以外のより一般の摩擦項の係数関数の場合のスペクトル構造に関し, 先に定理 4.3 で述べたような小ささを仮定しない場合には今も未解決問題として残されている.

6. 2次元外部領域における散乱問題

これまで述べた結果のうち, 散乱問題に関わる結果 (定理 4.2 (2), 定理 4.3) では常に空間次元 $d = 2$ が除かれていた. これを解決することを問題とし, 次のような結果を得ることに成功した：

Theorem 6.1. (Nakazawa[33]) 空間次元 d は $d \geqq 2$ を満たすとし, 摩擦項を伴う波動方程式の定常問題 (4.6) の外部問題を Dirichlet 0 境界条件 で考える (定理 4.2 を参照). 但し外部領域 Ω は原点を含まず, また $\mathbb{R}^d$ における領域 Ω の補集合 $\mathbb{R}^d \setminus \Omega$ (障害物) は原点に関して星状であるとする：

$$0 \notin \Omega, \qquad \left(n, \frac{x}{r}\right) \leqq 0,$$

ここに n は $\partial\Omega$ の単位外向き法線を表し, $(\cdot, \cdot)$ は通常の L^2-内積を表す. 関数 $b(x)$ は次を満たすとする：

$$|b(x)| \leqq b_5 r^{-2-\delta}, \tag{6.1}$$

但し $\delta > 0$ に対して b_5 は次の意味で小さいとする：

$$0 < b_5 < \frac{1+2\delta}{7+6\delta}.$$

[31] ある時刻から先の全ての時刻で 0 になる解をさす.

[32] A. Majda, Disappearing solution for dissipative wave equation, Indiana Univ. Math. J. 24 (1975), pp.1119–1133.

[33] H. Nakazawa, Uniform resolvent estimates for Schrödinger equations in an exterior domain in $\mathbb{R}^2$ and their applications to scattering problems, Bull. Lib. Arts & Sci. Nippon Med. Sch., No. 42 (2013) pp.1–12.

このとき (4.6) の解に対して次のような一様リゾルベント評価式が成り立つ：

$$
\begin{aligned}
&|\kappa|^2||u||^2_{r^{-1-\delta}} + ||u||^2_{r^{-3-\delta}} + ||D^\pm_r u||^2_{r^{-1-\delta}} \\
&\qquad + \int_{\partial\Omega} \{-(x,n)\} |u_n|^2 dS \leqq C||f||^2_{r^{3+\delta}},
\end{aligned}
\tag{6.2}
$$

ここに作用素 $D^\pm_r$ は次で定義される：

$$
D^\pm_r u = u_r + \frac{N-1}{2r} u \mp i\kappa u \quad (\pm\Im\kappa \geqq 0),
$$

但し $u_r = \left(\nabla u, \dfrac{x}{r}\right)$ である.

Remark 6.1. この結果として, 2 次元の場合の極限吸収原理や (逆向き) 波動作用素の存在, 対応する時間発展方程式に対する平滑化評価式等も得られる (脚注 33 の文献を参照のこと.).

この定理の応用として非定常問題

$$
\begin{cases}
w_{tt} - \Delta w + b(x) w_t = f(x) e^{-i\kappa t}, & (x,t) \in \Omega \times \mathbb{R}, \\
w\big|_{t=0} = w_t\big|_{t=0} = 0, \ \ x \in \Omega, & w = 0, \quad (x,t) \in \partial\Omega \times \mathbb{R}
\end{cases}
\tag{6.3}
$$

(但し $f \in X_{r^{3+\delta}}$) の解を, Dieichlet 0 境界条件を仮した定常問題 (4.6) の解の極限として求めることを主張する極限振幅の原理が得られる：

Theorem 6.2. (Nakazawa[34]) 前定理と同じ仮定の下で, 非定常問題 (6.3) の解 w と定常問題 (4.6) の解 u に対して次が成り立つ：

$$
||w(\cdot,t)e^{i\kappa t} - u(\cdot)||^2_{r^{3+\delta}} \to 0 \quad (t \to +\infty).
$$

摩擦項の係数関数に関する減衰度の条件 (6.1) は単なる短距離型条件よりも強い条件となっている. これを通常の短距離型条件

$$
|b(x)| \leqq b_5 r^{-1-\delta}
$$

で置き換えられるかは現時点では不明である. またリゾルベント評価 (6.2) の左辺第一項と右辺の重み関数の双対性の関係が破れている:

$$
(r^{-1-\delta})^{-1} \neq r^{3+\delta}.
$$

これを改善するのが問題となる. この問題は, 次章で紹介する結果によって一応の解決を見る (次章定理 7.1 の (7.3) 式を見よ).

[34] 脚注 33 の文献.

７．２次元外部領域における磁場付きシュレーディンガー作用素

3 次元以上の磁場付きシュレーディンガー作用素に対しては既に望月清によって満足のいく結果が得られている[35]が, 2 次元の場合には未解決であった. 前章の結果を受けて我々は, この問題を解決することが出来た. 考える問題は磁場の効果を伴う定常シュレーディンガー方程式の 2 次元外部問題である：

$$\begin{cases} -\displaystyle\sum_{j=1}^{2}\bigl\{\partial_j + ib_j(x)\bigr\}^2 u + V(x)u - \kappa^2 u = f(x), & x \in \Omega, \\ u(x,\kappa) = 0, & x \in \partial\Omega. \end{cases} \tag{7.1}$$

但し, $\partial_j = \partial/\partial_{x_j} (j = 1, 2)$, $i = \sqrt{-1}$, $\kappa \in \Pi_\pm = \bigl\{\kappa \in \mathbb{C}; \pm\Re\kappa > 0, \Im\kappa > 0\bigr\}$, 関数 $b_j(x)$ は $\overline{\Omega} = \Omega \cup \partial\Omega$ 上の実数値 C^1 関数, 関数 $V(x)$ は $\overline{\Omega}$ 上の実数値連続関数, $f(\cdot) \in L^2(\Omega)$, $b(x) = (b_1(x), b_2(x))$ は磁位 (magnetic potential), $\nabla \times b(x) = \partial_1 b_2(x) - \partial_2 b_1(x)$ は磁場 (magnetic field) であり, また以下では次のような記号を用いる：$\nabla = (\partial_1, \partial_2)$, $\nabla_b = \nabla + ib(x)$, $\Delta_b = \nabla_b \cdot \nabla_b$.

2 次元の場合に未解決であった理由は, d を一般の空間次元 ($d \geqq 1$), u を定常問題 (7.1) の解とすると, (7.1) から部分積分によって得られるエネルギー等式に

$$\frac{(d-1)(d-3)}{4r^2}u^2$$

の項が現れ, $d = 2$ の場合にはこれを非負として評価することが出来ないことが原因であった. この困難を乗り越えるためには, 通常の Hardy の不等式の証明を見直す必要があった. この証明では空間次元に依存するパラメータとして $d - 2$ を選ぶ必要があるのだが, 放射条件に関連する Hardy 型の不等式の証明においてはパラメータとして空間次元に依存しない定数を選ぶことが出来るというのが 2 次元の場合の克服のポイントである (脚注 33 の文献の Proposition 1.1 の $a \in (0, 1]$ が空間次元に無関係なパラメータである). これにより, 上で指摘した $d = 2$ の場合に負となり残る項を補うことが出来る. なお実際には, 今述べた放射条件に関連する Hardy 型不等式自身ではなく, 2 次元の場合の Hardy の不等式に対応する Leray の不等式に現れる, 対数の重み (後述の条件 ($A2$) の右辺の関数 $r^{-2}(\log r/r_0)^{-2}$ (但し $r > {}^{\exists}r_0 > 0$)) を取り込んだ工夫をすることで, 2 次元外部領域におけるリゾルベント評価が完了する. なおその過程で, 全空間の場合

[35] K. Mochizuki, Uniform resolvent estimates for magnetic Schrödinger operators and smoothing effects for related evolution equations, Publ. Res. Inst. Math. Sci., 46, no. 4 (2010), pp. 741–754.

が排除される (後述の条件 $(A1)$ を参照) 理由は, 重み関数として対数関数を選んでいることによる.

さて作用素 $L=-\Delta_b+V(x)$ は, その定義域を

$$\mathcal{D}(L)=\Big\{u\in L^2(\Omega)\cap H^2_{\rm loc}(\overline{\Omega});(-\Delta_b+V)u\in L^2(\Omega),u\big|_{\partial\Omega}=0\Big\}$$

と定めると, $c(x)$ が Ω 上有界という仮定の下で, $L^2(\Omega)$ において下に半有界な自己共役作用素となる[36]. 更に,

$$\max\big\{|\nabla\times b(x)|,|V(x)|\big\}=o(r^{-1})\quad\text{as}\quad r\to\infty$$

が満たされていれば, 作用素 L の本質スペクトルは非負の実軸全体に一致する[37]: $\sigma_{\rm ess}(L)=[0,\infty)$.
L が自己共役なので, そのリゾルベント $R(\kappa^2)=\big(L-\kappa^2\big)^{-1}$ は各 $\kappa\in\Pi_\pm$ に対して定義され, $u=R(\kappa^2)f$ が (7.1) の一意な L^2 解を与える.

領域 Ω に対しては次を仮定する:

$$(A1)\qquad\exists r_0>0\ \text{ such that }\ \min\big\{|x|;x\in\partial\Omega\big\}>r_0.$$

従って $\Omega=\mathbb{R}^2$ の場合は除く.
磁場とポテンシャルに対しては, 次を仮定する:

$$(A2)\quad\big\{|\nabla\times b(x)|^2+|V(x)|^2\big\}^{1/2}\leqq\frac{\varepsilon_0}{r^2\left(1+\log r/r_0\right)^2}\quad\text{in}\quad\Omega,$$

但し $0<\varepsilon_0<\dfrac{1}{4\sqrt{21}}$.

Theorem 7.1. (Mochizuki-Nakazawa [38]) (1) $(A1)$, $(A2)$ の仮定の下, (7.1) の解 u と各 $\kappa\in\Pi_\pm$ に対して次の不等式が成り立つ:

$$||u||^2_{r^{-2}\left(1+\log\frac{r}{r_0}\right)^{-2}}+\Im\kappa||u||^2_{r^{-1}\left(1+\log\frac{r}{r_0}\right)^{-2}}\leqq C_1||f||^2_{r^2\left(1+\log\frac{r}{r_0}\right)^2}.\tag{7.2}$$

---

[36] 例えば K. Mochizuki, Spectral and Scattering Theory for Second Order Elliptic Differential Operators in an Exterior Domain, Lecture Notes Univ. Utah, Winter and Spring (1972) を参照.

[37] A.R. Aliev and E.H. Eyvazov, On the essential spectrum of electromagnetic Schrödinger operator with singular electric potential, Complex Var. Elliptic Equ., vol. 59 (2014), no. 1, pp. 18–27.

[38] K. Mochizuki and H. Nakazawa, Uniform resolvent estimates for magnetic Schrödinger operators in 2D exterior domain and their applications to related evolution equations, submitted (2013).

更に, ベクトル値関数 $D^+(x,\kappa)u = \nabla_b u + \frac{x}{r}\left(\frac{1}{2r} - i\kappa\right)u$ と各 $\kappa \in \Pi_\pm$ に対して次の不等式が成り立つ：

$$||D^+u||^2_{\left(4+\log\frac{r}{r_0}\right)^{-2}} + \Im\kappa ||D^+u||^2_{r\left(4+\log\frac{r}{r_0}\right)^{-2}} \leqq C_2||f||^2_{r^2\left(1+\log\frac{r}{r_0}\right)^2}. \tag{7.3}$$

(2) $(A1)$, $(A2)$ に加えて, $\mu(r)$ は $[r_0,\infty)$ 上の正値かつ滑らかな可積分関数で

$$2r\mu'(r) \leqq \mu(r) \quad \text{and} \quad \mu(r) \leqq \frac{C_3}{(4+\log r/r_0)^2}$$

が成り立つと仮定する（C_3 はある正定数）. このとき, (7.1) の解 u と各 $\kappa \in \Pi_\pm$ に対して次の不等式が成り立つ：

$$|\kappa|^2||u||^2_\mu + ||\nabla u||^2_\mu \leqq C_4||f||^2_{r^2\left(1+\log\frac{r}{r_0}\right)^2 + \mu(r)^{-1}}. \tag{7.4}$$

ここに $||\mu||_{L^1} = \int_{r_0}^\infty \mu(t)dt.$

この定理の中の不等式 (7.2) より特に

$$||u||^2_{r^{-2}\left(1+\log\frac{r}{r_0}\right)^{-2}} \leqq C||f||^2_{r^2\left(1+\log\frac{r}{r_0}\right)^2}$$

が成り立つので加藤敏夫による smooth perturbation theory により次のような時間発展方程式に対する解の平滑化評価式を得ることが出来る.

Theorem 7.2. (Mochizuki-Nakazawa[39]) $(A2)$ を仮定する. そのとき時間依存シュレーディンガー方程式

$$i\frac{\partial u}{\partial t} - Lu = 0, \quad u(0) = f \in L^2(\Omega)$$

の解を記述する発展作用素 e^{-itL} に関して, 次の二つの不等式が成り立つ：

$$\left|\int_0^{\pm\infty} \left|\left|\int_0^t e^{-i(t-\tau)L}h(\tau)d\tau\right|\right|^2_{r^{-2}\left(1+\log\frac{r}{r_0}\right)^{-2}} dt\right| \leqq C_1\left|\int_0^{\pm\infty} ||h(t)||^2_{r^2\left(1+\log\frac{r}{r_0}\right)^2} dt\right|,$$

$$\left|\int_0^{\pm\infty} \left|\left|e^{-itL}f\right|\right|^2_{r^{-2}\left(1+\log\frac{r}{r_0}\right)^{-2}} dt\right| \leqq 2\sqrt{C_1}||f||^2,$$

[39]脚注 38 の文献.

但し関数 $h(t)$ は $r\left(1+\log\frac{r}{r_0}\right)h(t)\in L^2(\mathbb{R}\times\Omega)$ を満たすものとし, また関数 $f(t)$ は $f(t)\in L^2(\mathbb{R}\times\Omega)$ を満たすとする.

Remark 7.1. この定理と同様の平滑化評価式は相対論的シュレーディンガー方程式やクラインゴルドン方程式, 波動方程式に対しても示すことが出来る.

8. 文献

以下では文献を挙げながら本文を補う.

まず読み物的なものとして, ノイマンの量子力学の数学的基礎については佐藤文隆 [1], 小澤正直 [2] を, 加藤敏夫については自身による解説 [3], [4], 黒田成俊 [5] を, 数学的散乱理論に関するより簡潔な解説は 黒田成俊 [6], [7], 池部晃生 [8], 加藤祐輔 [9], 北田均 [10], 中村周 [11], 伊藤宏 [12], 足立匡義 [13] 等を参照. なお「数理物理私の研究」所収の記事 (黒田成俊 [14], 井川満 [15], 磯崎洋 [16]) はそれぞれの研究スタンスを知る上で参考になる.

次に, より教科書的な文献を挙げよう. シュレーディンガー作用素に対する散乱理論や関連する話題については, 池部晃生 [17], 黒田成俊 [18], [19], 谷島賢二 [20], [21], 新井朝雄 [22], 中村周 [23] を参照. 特に多体問題については磯崎洋 [24] がある. また, 波動方程式の散乱理論については望月清 [25] や井川満 [26] を参照のこと.

以上の他に物理としての散乱理論に関しては, モット-マッセイ [27], 高柳和夫 [28], 砂川重信 [29], マッセイ [30], 笹川辰弥 [31], 並木美喜雄–大場一郎 [32], 河合光路–吉田思郎 [33], 梅沢博臣–ジョセッピ・ヴィティエロ [34], 高柳和夫 [35], D. S. Sivia [36] などがある.

参考文献

[1] 佐藤文隆, 量子力学のフォン・ノイマン, 現代思想 8 月号臨時増刊, 青土社, 2013, pp. 72–80.

[2] 小澤正直, フォン・ノイマンと量子力学の数学的基礎, 現代思想 8 月号臨時増刊, 青土社, 2013, pp. 154–181.

[3] 加藤敏夫, 量子力学の関数解析 – 研究のあと (特集 量子力学 50 年), 科学 46(1), 岩波書店, 1976-01, pp. 50–55.

[4] 加藤敏夫, 量子力学の関数解析, 量子物理学の展望 (下) – 50 年の歴史に立って – (江沢洋・恒藤敏彦 編), 岩波書店, 1978, pp. 669–686.

[5] 黒田成俊, 加藤敏夫先生を偲んで, 日本物理學會誌 54(12), 1999, pp. 989.

[6] 黒田成俊, 量子力学とスペクトル理論 (特集 量子力学), 数理科学 1977 年 11 月号, サイエンス社, 1977, pp. 22–27.

[7] 黒田成俊, 量子力学の数学的基礎, 現代物理学の歴史 I, 朝倉物理学体系 20, 朝倉書店, 2004, pp. 28–41.

[8] 池部晃生, 《連続》固有値 (特集 固有値), 数理科学 1981 年 2 月号, サイエンス社, 1981, pp. 9–13.

[9] 加藤祐輔, 物理の中の固有値問題 (特集 固有値), 数理科学 1981 年 2 月号, サイエンス社, 1981, pp. 22–27.

[10] 北田均, 散乱の量子論 加藤スクールからエンス, シーガルへ (特集 数理物理の歩み), 数理科学 1992 年 5 月号, サイエンス社, 1992, pp. 24–29.

[11] 中村周, シュレディンガー方程式をめぐって, フォーラム：現代数学の風景–解析学の展開, 数学のたのしみ No.4, 日本評論社, 1997, pp. 51-68.

[12] 伊藤宏, シュレーディンガー作用素の固有値と固有ベクトル (特集 固有ベクトルと解析学), 数学セミナー 2012 年 12 月号, 日本評論社, 2012, pp. 29-33.

[13] 足立匡義, 散乱理論 (特集 量子力学と数学), 数学セミナー 2013 年 11 月号, 日本評論社, 2013, pp. 12-16.

[14] 黒田成俊, 数学的散乱理論発展の流れの中で, 数理物理 私の研究 量子数理シリーズ 2, 丸善出版, 2012, pp. 185-190.

[15] 井川満, 波動方程式に対する散乱問題, 数理物理 私の研究 量子数理シリーズ 2, 丸善出版, 2012, pp. 25-30.

[16] 磯崎洋, シュレーディンガー方程式の 3 体問題，数理物理 私の研究 量子数理シリーズ 2, 丸善出版, 2012, pp. 31-38.

[17] 池部晃生, 数理物理の固有値問題 離散スペクトル, 数理解析とその周辺 15, 産業図書, (1976).

[18] 黒田成俊, スペクトル理論 II, 岩波講座 基礎数学 17 解析学 (II) xi (第 1 次 1979, 第 3 次 1988).

[19] 黒田成俊, 量子物理の数理, 岩波書店, (初版 1997, 改版 2007).

[20] 谷島賢二, シュレーディンガー方程式, 数学の未解決問題 21 世紀数学への序章, 臨時別冊・数理科学 SGC ライブラリ 21, サイエンス社 (2003) pp. 134–143.

[21] 谷島賢二, Schrödinger 方程式, 応用数学ハンドブック第 8 章 (シュプリンガージャパン 2010, 丸善 2012) pp. 577-616.

[22] 新井朝雄, 量子現象の数理, 朝倉物理学体系 12, 朝倉書店 (2006).

[23] 中村周, 量子力学のスペクトル理論, 共立講座 21 世紀の数学 26, (2012).

[24] 磯崎洋, 多体シュレーディンガー方程式, シュプリンガーフェアラーク東京, (2004).

[25] 望月清, 波動方程式の散乱理論, 紀伊国屋書店, (初版 1984, OD 版 2008).

[26] 井川満, 散乱理論, 岩波書店, (初版 1999, 改版 2008).

[27] モット–マッセイ, 新版 衝突の理論 上 I (1975), 上 II(1975), 下 I(1976), 下 II(1977), 物理学叢書 17 a, b, 18 a, b, 吉岡書店.

[28] 高柳和夫, 電子・原子・分子の衝突, 培風館 (初版 1972, 改訂版 1996).

[29] 砂川重信, 散乱の量子論, 岩波全書 296, 岩波書店 (1977).

[30] マッセイ, 原子・分子の衝突 (小山慶太 訳), 共立出版 (1981).

[31] 笹川辰弥, 散乱理論, 物理学選書 20, 裳華房 (1991).

[32] 並木美喜雄–大場一郎, 散乱の量子力学, 岩波書店 (1997).

[33] 河合光路–吉田思郎, 原子核反応論, 朝倉物理学体系 19, 朝倉書店 (2002).

[34] 梅沢博臣–ジョセッピ・ヴィティエロ, 量子力学変換理論と散乱理論 (保江邦夫-治部眞里 訳), 日本評論社, (2005).

[35] 高柳和夫, 原子衝突, 朝倉物理学体系 14, 朝倉書店 (2007).

[36] D. S. Sivia, X 線・中性子の散乱理論入門 (竹中章郎-藤井保彦 訳), 森北出版 (2014).

（受付日　平成 26 年 6 月 18 日）
（受理日　平成 26 年 9 月　5 日）